# ODWZOROWANIA WIELOWARTOŚCIOWE

MIECZYSŁAW CICHOŃ

## 1. Pojęcie multifunkcji. naturalne realizacje

Tu wprowadzimy podstawowe pojęcia...

Przez odwzorowanie wielowartościowe (multifunkcję) rozumiemy dowolne odwzorowanie $P : T \longrightarrow 2^X$, gdzie $2^X$ jest rodziną wszystkich podzbiorów $X$. Na ogół interesowaŕ nas będzie sytuacja, gdy ma ona wartości niepuste.

Dziedziną (istotną) multifunkcji nazywamy zbiór

$$T_P = \{t \in T : P(t) \neq \emptyset\}.$$

Wtedy $P : T_P \longrightarrow N(X)$, gdzie $N(X)$ jest rodziną wszystkich niepustych podzbiorów $X$. W tym przypadku będziemy również pisać

$$P : T \rightsquigarrow X.$$

Multifunkcje będziemy oznaczać wielkimi literami $F$, $G$, $P$,... .

Odwzorowania są naturalne w wielu różnych sytuacjach:

**1:** Miejsca zerowe wielomianów np. $P(x) = \{y : w(x,y) = 0\}$, gdzie $w(x,y)$ jest wielomianem dwóch zmiennych;

**2:** Częste w teorii sterowania: $F(t) = f(t,Y)$, gdzie $f : T \times Y \longrightarrow X$ jest daną funkcją;

**3:** $G(t) = \{x : g(t,x) \leq 0\}$ dla danej funkcji $g : T \times X \longrightarrow \mathbb{R}$;

**4:** $Log(z) = \{w : \exp w = z\}$ określonej dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

**5:** Niech $a, b : T \longrightarrow \mathbb{R}$ będą danymi funkcjami. Rozważamy przedziały

$$P(t) = [a(t), b(t)].$$

Wtedy $P : T \rightsquigarrow \mathbb{R}$ oraz dziedziną $P$ jest zbiór $T_P = \{t : a(t) \leq b(t)\}$.

---

*Date*: wersja robocza.

**w dużej części oparte o** [4], [5]

**Bardzo dziękuję prof. A. Fryszkowskiemu za udostępnienie manuskryptu** [4] **- polecam jego książki!**

## 2. Ciągi zbiorów

### 2.1. **Definicja oparta o teorię mnogości.** .

Podstawowe informacje w języku polskim są w książkach K. Kuratowskiego "Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii" str. 54 oraz K.Kuratowski, M. Mostowski "Teoria Mnogości" - strona 70 (dostęp w ICM : http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/mon/mon27/mon2702.pdf ).

2.2. **Pojęcie granicy w przestrzeni topologicznej.** Można tu wykorzystać poprzednie definicje, ale "poprawić" pewne (omawiane na wykładach) konrprzykłady (brak zieżności ciągu zbiorów jednoelementowych będących wyrazami ciągów zbieżnych!!).

Definiujemy:

$$\widetilde{Ls}A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}$$

$$\widetilde{Li}A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty}} A_k.$$

Dla zainteresowanych: sprawdzić co to jest topologia Fella na rodzinie zbiorw. Jest generowana przez dwa rodzaje zbiorw. Dla $A \subset S$ zdefinujmy

$$A^- = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\},$$

and

$$A^+ = \{B \in 2^X : B \subset A\}.$$

*Dolna topologia Fella* na $2^X$ jest generowana przez podbazę zbiorów otwartych postaci $W^-$, gdzie $W$ jest zbiorem otwartym w $X$.

*Górna topologia Fella* na $2^X$ jest generowana przez podbazę zbiorów otwartych postaci $C^+$, gdzie $C$ ma zwarte dopenienie w $X$.

Poza klasą przestrzeni lokalnie zwarych $X$ nie jest to nawet przestrzeń Hausdorffa, ale w naszych rozważaniach rozpatrujemy na ogół lokalnie zwarte przestrzenie metryczne, wię nie jest to istotnym ograniczeniem.

Ta topologia wprowadzona na $cl(X)$ jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $X$ jest lokalnie zwarta i spełnia drugi aksjomat przeliczalności [7, Theorem 5.1.5]). Oczywiście dla $X = \mathbb{R}$ nie mamy problemu i nie musimy rozpatrywać ciągów uogólnionych ...

A teraz najważniejsze pojęcie:

**Definicja 1.** *Niech $(A_n)$ będzie ciągiem domkniętych zbiorów w przestrzeni topologicznej $X$. Zbiór $LiA_n$ nazywamy* **granicą dolną w sensie Kuratowskiego** *tego ciągu jeśli jest zbiorem wszystkich punktów $y \in X$, dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje ze zbiorami $A_n$ poza, co najwyżej, ich skończoną liczbą.*

*Odpowiednio:* **granica górna Kuratowskiego** *$LsA_n$ to zbiór punktów $y \in X$, dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje z nieskończoną liczbą zbiorów $A_n$.*

**Lemat 2.** (cf. [19, Theorem 2.6]) *W dowolnej przestrzeni topologicznej $X$ topologie Fella i Kuratowskiego są porównywalne: $\tau_F \subset \tau_K$.*

A w przypadku lokalnie zwartych $X$ mamy więcej ([19, Theorem 1.1]):

**Lemat 3.** ([7, Theorem 5.2.10] or [18, Proposition 2.4]) *Niech $X$ będzie lokalnie zwarta. Ciąg domkniętych podzbiorŵ w $X$ jest zbieżny w $\tau_F$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbie:zny w $\tau_K$ i obie granice sĄ równe.*

Co więcej:

**Stwierdzenie 4.** ([7, Proposition 5.2.5]) *Niech $(A_n)$ będzie ciągiem domkniętych pozdbiorów lokalnie zwartej przestrzeni $X$. Następujące warunki są równoważne:*
- [K1] $A \subset LiA_n$ *i dla dowolnego zbioru zwartego* $K \subset X$*, mamy* $Ls(K \cap A_n) \subset A$*,*
- [K2] $A_n$ *jest zbieżny w topologii Fella do* $A$*.*

Dla zwartych przestrzeni $S$ topologia Fella jest równoważna z topologią wyznaczoną przez metrykę Hausdorffa ([7, Corollary 5.1.11]).

Wybieranie podciągów zbieżnych (proszę porównać z wynikiem dla ciągów liczbowych!!):

**Stwierdzenie 5.** ([7, Theorem 5.2.12]) *Niech $X$ będzie przestrzenią metryczną oraz $A_n$ - ciągiem zbiorów w $cl(X)$. Wtedy $(A_n)$ ma podciąg zbieżny w sensie Kuratowskiego.*

### 2.3. **Granice ciągu zbiorów w przestrzeniach metrycznych i unormowanych.** .

Inna, szczególnie przydatna, definicja zbieżności w sensie Kuratowskiego może być podana w przestrzeniach metrycznych. Rozpocznijmy od sformuownia ogólnego:

**Definicja 6.** ([18, Definition 1.9]) *Niech $(A_n)$ będzie ciągiem domkniętych zbiorów w przestrzeni metrycznej $X$. Zbiór $LiA_n$ nazywamy granicą dolną w sensie Kuratowskiego tego ciągu jeśli jest zbiorem wszystkich punktów $y \in X$, dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje ze zbiorami $A_n$ poza, co najwyżej, ich skończoną liczbą.*

*Odpowiednio: granica górna Kuratowskiego $LsA_n$ to zbiór punktów $y \in X$, dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje z nieskończoną liczbą zbiorów $A_n$.*

Jeśli $LiA_n = LsA_n = A$ to piszemy $LimA_n = A$ i mówimy, że $(A_n)$ jest zbieżny do $A$ w sensie Kuratowskiego.

Ta zbieżność nie jest topologiczna w dowolnej przestrzeni (Twierdzenie Mrówki [18, Proposition 2.2]), ale na przestrzeniach lokalnie zwartych Hausdorffa już istnieje topologia powiązana z tą zbieżnością.

Mamy następujące charakteryzacje granic Kuratowskiego:

$$LsA_n = \{x \in X : \liminf_{n\to\infty} dist(x, A_n) = 0\},$$
$$LiA_n = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} dist(x, A_n) = 0\}$$

oraz

$$LsA_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \quad and \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} \subset LiA_n.$$

Dla porwnania: zbieżność ciągów zbiorów w $\mathbb{R}$ w topologii Fella daje nam:

**Stwierdzenie 7.** ([7, Corollary 5.1.7]) *Ciąg zbiorów domkniętych $A_n$ w $\mathbb{R}$ jest zbieżny do $A$ w topologii Fella wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zwrtego zbioru $K \subset \mathbb{R}$ mamy $\lim_{n\to\infty} e(K \cap A, A_n) = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} e(K \cap A_n, A) = 0$.*

Jest to charakteryzacja w terminach funkcji odstępu $e(\cdot, A)$, a nie funkcji $dist(\cdot, A)$! Te defincje są omawiane na wykładzie i ćwiczeniach, a zostaną wprowadzone w kolejnym podrozdziale.

## 3. Ciągłość multifunkcji

.............................

Podamy wybrane realizacje chrakteryzacji ciągłości multifunkcji bazujące na różnych podejściach znanych dla funkcji: definicja Heinego (ciągi zbiorów !!), definicja Cauchy'ego (metryki i topologie na rodzinach zbiorów - wiele możliwości...) czy charakteryzacje w przestrzeniach topologicznych.

Poniżej mała próbka, a szczegóły na wykładach.

**Definicja 8.** *Odwzorowanie wielowartościowe $G : E \to 2^E$ o niepustych, domkniętych wartościach nazywamy hemi-półciągłe z góry (uhc) [słabo hemi-półciągłe z góry, $\omega - uhc$] wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x^* \in E^*$ i każdego $\lambda \in R$ zbiór $\{x \in E : \sigma(x^*, G(x)) < \lambda\}$ jest otwarty w $E$ [w $(E, \omega))$], gdzie $\sigma(x^*, G(\cdot))$ jest funkcją półciągłą z góry daną wzorem $\sigma(x^*, A) = \sup\limits_{x \in A} x^*(x)$.*

**Definicja 9.** *Odwzorowanie wielowartościowe $G : E \to 2^E$ nazywamy słabo ciągowo hemi-półciągłe z góry ($\omega - seq\ uhc$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x^* \in E^*$, funkcja $\sigma(x^*, G(\cdot)) : E \to R$ jest ciągowo półciągła z góry w $(E, \omega)$.*

## 4. Metryki na rodzinach zbiorów

Czyli o odległościach zbiorów - nie tylko metryka Hausdorffa...

**Metryka (Pompeiu-)Hausdorffa** ([7]) $(X, d)$ - przestrzeń metryczna)

Zdefiniujmy funkcję "dist" odległości punktu od zbioru:

$$dist(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Dla zbiorów domkniętych $X, Y \subset X$ zdefiniujmy:

$$e(X, Y) = \sup_{x \in X} dist(x, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y) = \inf\{r > 0 \ : \ X \subset B(Y, r)\},$$

oraz

$$h(X, Y) = \max\{e(X, Y), e(Y, X)\} \ .$$

Przyjmijmy umownie, $e(\emptyset, Y) = 0$.

Wielkość $e(X, Y)$ nazywamy odstępem (excess) lub odległością niesymetryczną pomiędzy zbiorami $X$ i $Y$. Funkcję $h : cl(X) \times cl(X) \to \mathbb{R}_+$ nazywamy odległością Hausdorffa zbiorów $X$ i $Y$. Można pokazać, że na rodzinie zbiorów domkniętych jest to metryka.

Zbiory nieograniczone: metryka Hausdorffa może wynosić $+\infty$:

$$h([-n, n], \mathbb{R}) = +\infty$$

dla $n \geq 1$.

Pamiętajmy (przykład na zajęciach), że nawet metryki równoważne mogą generować nierównoważne metryki Hausdorffa, czyli ta metryka jest ona silnie zależna od ustalonej metryki na $X$!!

### 4.1. Własności metryki Hausdorffa.

- $d$ – metric in $X$, $d(a,B)=\inf_{b\in B} d(a,b)$ – odległość "distance",
- $e_d(A,B)=\sup_{a\in A} d(a,B)$ – odstęp "excess",
- $h_d(A,B)=\max\{\, e(A,B), e(B,A)\,\}$ – metryka Hausdorffa,
- $B(a,r)=\{x\in X : d(x,a)<r\}$ – kula otwarta, $\mathcal{O}_r(A)=\{x\in X : d(x,A)<r\}$ – $\varepsilon$-otoczenie

Opisy równoważne:

1. $B(a,\varepsilon)=\mathcal{O}_\varepsilon\{a\}$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon A=\bigcup\limits_{a\in A} B(a,\varepsilon)$ $\qquad x\in\mathcal{O}_\varepsilon A \Leftrightarrow B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$
2. $e(A,B)=\inf\{\, r>0 : A\subset\mathcal{O}_r B\,\}=\sup_{x\in X}(d(x,B)-d(x,A))=\inf_{f:A\to B}\ \sup_{a\in A} d(a,f(a))$
3. $h(A,B)=\inf\{\, r>0\ :\ A\subset\mathcal{O}_r B,\ B\subset\mathcal{O}_r A\,\}=\sup_{x\in X}|d(x,A)-d(x,B)|$

Własności odstępu zbiorów $e$ i metryki $h$

1. $e(A,B)=0\Leftrightarrow A\subset\overline{B}$ $\qquad h(A,B)=0\Leftrightarrow\overline{A}=\overline{B}$
2. $h(A,B)=h(B,A)$ $\qquad e(A,B)\neq e(B,A)$ (w całej ogólności)
3. $e(A,B)\leqslant e(A,C)+e(C,B)$ $\qquad h(A,B)\leqslant h(A,C)+h(C,B)$
4. $e(A,B)=e(A,\overline{B})=e(\overline{A},B)=e(\overline{A},\overline{B})$ $\qquad h(A,B)=h(A,\overline{B})=h(\overline{A},B)=h(\overline{A},\overline{B})$
5. $A\subset B\ \Rightarrow\ e(A,C)\leqslant e(B,C)$
6. $e(A\cup C,B\cup C)\leqslant e(A,B)$ $\qquad h(A\cup C,B\cup C)\leqslant h(A,B)$
7. $e(\bigcup\limits_{i\in I}A_i,\ \bigcup\limits_{i\in I}B_i)\leqslant\sup_{i\in I}e(A_i,B_i)$ $\qquad h(\bigcup\limits_{i\in I}A_i,\ \bigcup\limits_{i\in I}B_i)\leqslant\sup_{i\in I}h(A_i,B_i)$
8. $e(\bigcup\limits_{i\in I}A_i,B)=\sup_{i\in I}e(A_i,B)$ $\qquad e(A,\bigcup\limits_{i\in I}B_i)\leqslant\inf_{i\in I}e(A,B_i)$
9. $d(x,\bigcup\limits_{i\in I}B_i)=\inf_{i\in I}d(x,B_i)$ $\qquad \inf_{a\in A\ b\in B}\ d(a,b)\leqslant\min\{e(A,B),e(B,A)\}\leqslant h(A,B)$
10. $e(\lambda A,\lambda B)=|\lambda|\cdot e(A,B)$ $\qquad e(\lambda A,\mu A)\leqslant|\lambda-\mu|\cdot\|A\|$ $\qquad$ (gdzie $\|A\|=\sup_{a\in A}\|a\|$ )
11. $e(A+C,B+C)\leqslant e(A,B)$ $\qquad h(A+C,B+C)\leqslant h(A,B)$
12. $e[\,A,\lambda B+(1-\lambda)C\,]\leqslant\lambda\cdot e(A,B)+(1-\lambda)\cdot e(A,C)\quad\forall_{\lambda\in(0,1)}$
13. $h[\,A,\lambda A+(1-\lambda)C\,]\leqslant h(A,C)\quad\forall_{\lambda\in(0,1)}\,\forall_{A,C}$ – zwarty
    [w przestrzeniach unormowanych]
14. $e(\operatorname{conv}A,\operatorname{conv}B)=e(A,\operatorname{conv}B)\leqslant e(A,B)$ $\qquad h(\operatorname{conv}A,\operatorname{conv}B)\leqslant h(A,B)$
15. $e_{d\wedge 1}(A,B)=e_d(A,B)\wedge 1$ $\qquad h_{d\wedge 1}(A,B)=h_d(A,B)\wedge 1$ $\qquad$ (gdzie $d\wedge 1=\min\{1,d\}$ )

Własności $\mathcal{O}$

1. $\overline{A}=\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon\overline{A}=\mathcal{O}_\varepsilon A$ $\qquad \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}A}\subset\mathcal{O}_{\varepsilon_2}A\quad\forall_{\varepsilon_1<\varepsilon_2}$
2. $A\subset B\ \Rightarrow\ \mathcal{O}_\varepsilon A\subset\mathcal{O}_\varepsilon B$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon A\cap B\subset\mathcal{O}_\varepsilon(\,A\cap\mathcal{O}_\varepsilon B\,)$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon A\cap B\neq\emptyset\Leftrightarrow A\cap\mathcal{O}_\varepsilon B\neq\emptyset$
3. $\mathcal{O}_\varepsilon\left(\bigcup\limits_{i\in I}A_i\right)=\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_\varepsilon A_i$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon\,(\mathcal{O}_\varepsilon A)^{\mathrm{c}}\subset A^{\mathrm{c}}$
4. $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}[\,\mathcal{O}_{\varepsilon_2}A\,]\subset\mathcal{O}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ $\qquad \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(\mathcal{O}_{\varepsilon_2}A)\neq\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}A)$ (w ogólności)
5. $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}[\,\mathcal{O}_{\varepsilon_2}A\,]=\mathcal{O}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ $\qquad$ [w przestrzeniach unormowanych]
6. $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(A)+\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B)\subset\mathcal{O}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A+B)$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon(A+B)=A+\mathcal{O}_\varepsilon B$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon(-A)=-\mathcal{O}_\varepsilon A$
7. $\lambda\mathcal{O}_\varepsilon(A)\subset\mathcal{O}_{|\lambda|\cdot\varepsilon}(\lambda A)\ \forall_{\lambda\neq 0}$ $\qquad \lambda\cdot\mathcal{O}_\varepsilon(A)\subset\mathcal{O}_\varepsilon(\lambda A)\ \forall_{|\lambda|\leqslant 1}$
8. $\operatorname{conv}(\mathcal{O}_\varepsilon A)\subset\mathcal{O}_\varepsilon(\operatorname{conv}A)$ $\qquad \operatorname{conv}(\mathcal{O}_\varepsilon\operatorname{conv}A)=\mathcal{O}_\varepsilon\operatorname{conv}A$

Inne własności:

1. $e(A,B)<\varepsilon\ \Rightarrow\ A\subset\mathcal{O}_\varepsilon B$ $\qquad A\subset\overline{\mathcal{O}_\varepsilon B}\ \Rightarrow\ e(A,B)\leqslant\varepsilon$

2. $h(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}A_1, \mathcal{O}_{\varepsilon_2}A_2) \leqslant h(A_1, A_2) + \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad h(A, \mathcal{O}_\varepsilon A) \leqslant \varepsilon$
3. $h(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}A_1, \mathcal{O}_{\varepsilon_2}A_2) = h(A_1, A_2) + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ [w przestrzeniach unormowanych]
4. $C$ – wypukły $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_\varepsilon C$ – wypukły [w przestrzeniach unormowanych]
5. $\varphi\colon X \multimap Y,\ h[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] \leqslant L \cdot d(x_1, x_2)$ (i.e. $\varphi$ – wielowartościowo Lipschitz'a)
   $\Rightarrow \qquad e[\varphi(A), \varphi(B)] \leqslant L \cdot e(A, B) \qquad \varphi(\mathcal{O}_\varepsilon A) \subset \mathcal{O}_{L\cdot\varepsilon}\,\varphi(A)$
6. $K = \bigcap_{n=1}^\infty K_n$ — zstępujący ciąg zwartych zbioróe $\Rightarrow$ $h(K_n, K) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
7. $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{h} A$, $A_n$ – spójny, $A$ – zwarty $\Rightarrow$ $A$ – spójny
8. $\operatorname{Li} A_n = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=m}^\infty \mathcal{O}_\varepsilon A_n \;\subset\; \operatorname{Ls} A_n = \bigcap_{m=1}^\infty \overline{\bigcup_{n=m}^\infty A_n}$
   $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{h} A \Rightarrow \operatorname{Li} A_n = A = \operatorname{Ls} A_n$

## 5. Selektory

Selektorem(selekcją) multifunkcji $F : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ nazywać będziemy każdą funkcję $f : X \to Y$ taką, że $f(x) \in F(x)$ dla każdego $x \in X$. Istnienie takiej funkcji wynika z aksjomatu wyboru.

Oczywiście może mieć ona różne doadatkowe własności, takie jak ciągłość czy mierzalność i zbadamy warunki wystarczające do istnienia (i liczby) takich selektorów.

5.1. **Twierdzenie Michaela o ciągłych selektorach.** W tym rozdziale omówimy twierdzenie o istnieniu ciągłego selektora dla multifunkcji *p.z.d.* z domkniętymi i wypukłymi wartościami oraz podstawowe jego konsekwencje.

Będziemy teraz zakładać, że $T$ jest parazwartą przestrzenią topologiczną Hausdorff'a. Dla dowolnej rodziny $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ funkcji ciągłych z $T$ w przestrzeń Banacha $X$ multifunkcja $P : T \longrightarrow cl\,(X)$ dana wzorem
$$P\,(t) = cl\,\{p_\alpha\,(t) : \alpha \in \Lambda\}$$
jest *półciągła z dołu* Oczywiście każda funkcja $p_\alpha$ jest ciągłym selektorem $P$. Z drugiej strony istnieją ciągłe multifunkcje, które nie mają ciągłych selektorów.

**Przykład 10** (Aubin-Cellina)**.** *Niech $T \subset \mathbb{R}^2$ będzie domkniętą kulą jednostkową. Rozważmy odwzorowanie wielowartościowe $P : T \longrightarrow cl\,(T)$ dane dla $t = (r\cos\varphi_t, r\sin\varphi_t)$ wzorem*
$$P\,(t) = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : |\varphi + \varphi_t| \leq \pi\,(1 - r)\}\,.$$
*Wtedy $P$* **jest** *odwzorowaniem* **ciągłym***, ale* **nie ma ono ciągłych selektorów.**

**Twierdzenie 11** (Michael)**.** [5, 6] *Niech $T$ będzie przestrzenią parazwartą, a $X$ - p. Banacha. Załóżmy, że $P : T \longrightarrow clco\,(X)$ jest multifunkcją p.z.d.. Wtedy $P$ ma ciągły selektor.*

**Dowód:** Dowód prowadzi się w trzech krokach. Szczegóły można znaleźć w [5, 6]. Tu tylko zarys dowodu, który warto znać, bo jest bardzo charakterystyczny i wszelki rozszerzenia tego twierdzenia (a istniejątakie) bazują na tej konstrukcji.

**I.** Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, skonstruujemy tzw. ciągły $\varepsilon-$ selektor , tzn. taką funkcję ciągły $p : T \longrightarrow X$, że
$$dist\,(p\,(t)\,, P\,(t)) < \varepsilon.$$
Dowodzi się, że wẃczas multifunkcja
$$R\,(t) = P\,(t) \cap B\,\{p\,(t)\,, \varepsilon\} \neq \emptyset.$$
multifunkcja $R : T \longrightarrow co\,(X)$ jest także *p.z.d.*.

**II.** Teraz podane zostaną konstrukcje dwóch ciągów:

(i) funkcji ciągłych $p_n : T \longrightarrow X$, $n = 1, 2, ...$ i multifunkcji *p.z.d.*

$$P_n : T \longrightarrow clco\,(X)\,,\ n = 0, 1, 2, ...$$

mających, dla każdego $t \in T$, następujące własności:

$$a)\ dist\,(p_{n+1}(t), P_n\,(t)) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

(ii) multifunkcji

$$b)\ P_{n+1}\,(t) \subset P_n\,(t) \subset P\,(t)\,.$$

**III.** Ostatecznie pokazuje się, że , $p_n$ zbiega niemal jednostajnie do $p$ i stąd wyniknie, że $p$ jest żądaną (ciągłym selektorem.

■

Oryginalne twierdzenie Michaela mówi znacznie więcej, niż przedstawione powyżej i ma następujące sformułowanie:

**Twierdzenie 12.** [6, 5] *Przestrzeń topologiczna Hausdorffa jest parazwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha $X$ posiada własność, że dowolna p.z.d. multifunkcja $P : T \longrightarrow clcoX$ ma ciągły selektor .*

Poprzedni wynik daje również odpowiedź na pytanie, **ile ciągłych selektorów** posiada dana *p.z.d.* multifunkcja $P : T \longrightarrow clco\,(X)$ i czy dla danego $t_0 \in T$ multifunkcja $P : T \longrightarrow clco\,(X)$ ma ciągłe selektory przyjmujące zadaną z góry wartość $x_0 \in P(t_0)$.

**Stwierdzenie 13.** *Załóżmy, że multifunkcja $P : T \longrightarrow clco\,(X)$ jest p.z.d. i niech $T_0 \subset T$ będzie ustalonym podzbiorem domkniętym. Wówczas każdą ciągły selektor $p : T_0 \longrightarrow X$ odwzorowania $P|_{T_0} : T_0 \longrightarrow clco\,(X)$ można przedłużyć do ciągłego selektora $P$ na całym $T$. W szczególności, dla danych $t_0 \in T$ oraz $x_0 \in P(t_0)$, istnieje ciągły selektor $p_{t_0,x_0}$ odwzorowania $P$ taka, że*

$$p_{t_0,x_0}\,(t_0) = x_0.$$

Ciekawy wynik (nawiążemy do niego w przypadku mierzalnych selektorów) daje nam następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 14.** *Niech $P : T \longrightarrow clco\,(X)$ będzie daną multifunkcją. Wówczas $P$ jest* p.z.d. *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciągłe funkcje $p_\alpha : T \longrightarrow X$ takie, że dla każdego $t \in T$*

$$P\,(t) = cl\,\{p_\alpha\,(t) : \alpha \in \Lambda\}\,. \tag{1}$$

*Jeżeli obie przestrzenie $T$ i $X$ są ośrodkowe to można zakładać, że reprezentacja (1) jest przeliczalna.*

Twierdzenie Michaela ma zastosowania w wielu działach matematyki, w tym również w badaniu funkcji rzeczywistych. **(PROSZĘ ZROBIĆ RYSUNEK!!!!)**

**Wniosek 15.** *Rozważmy funkcje $a, b : T \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające nierówność $a(t) \le b(t)$ $(t \in T)$ i takie, że $a$ jest* **funkcją** *p.z.g., zaś $b$ −* **funkcją** *p.z.d.. Załóżmy ponadto, że dla pewnego zbioru domkniętego $T_0 \subset T$ istnieje ciągła funkcja $c : T_0 \longrightarrow R$ spełniająca dla wszystkich $t \in T_0$ nierówności*

$$a\,(t) \le p\,(t) \le b\,(t)\,. \tag{2}$$

*Wtedy $p$ daje się przedłużyć w sposób ciągły na całą przestrzeń $T$ w taki sposób, by spełniona była nierówność (2). W szczególności, dla dowolnych $t_0 \in T$ i $x_0 \in [a(t_0), b\,(t_0)]$ istnieje ciągła funkcja $p_{t_0,x_0}$ taka, że dla wszystkich $t \in T$ zachodzi (2) oraz*

$$p_{t_0,x_0}\,(t_0) = x_0$$

Twierdzenie 14 ma również swój odpowiednik w analizie rzeczywistej
**(PROSZĘ ZROBIĆ RYSUNEK!!!!)**. Zachodzi mianowicie

**Twierdzenie 16.** *Niech* $a, b : T \longrightarrow R$ *będą danymi odwzorowaniami. Wtedy:*
*i. odwzorowanie* $a$ *jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje ciągłe* $a_\alpha : T \longrightarrow R$, $\alpha \in \Lambda$, *takie, że dla każdego* $t \in T$

$$a(t) = \sup_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha(t). \tag{3}$$

*Podobnie,*
*ii. odwzorowanie* $b$ *jest p.z.g.* wtedy i tylko wtedy, gdy *posiada ono reprezentację*

$$b(t) = \inf_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha(t) \tag{4}$$

*z ciągłymi* $b_\alpha : T \longrightarrow R$, $\alpha \in \Lambda$. *Ponadto, dla ośrodkowej przestrzeni metrycznej* $(T, d)$ *można żadać, żeby reprezentacje (3) i (4) były przeliczalne.*

Należy stwierdzić, że w Twierdzeniu Michaela wszystkie założenia są istotne.

**Stwierdzenie 17.** *Niech* $P : T \longrightarrow clco(X)$ *będzie multifunkcją p.z.d. i załóżmy, że mamy dane takie funkcje ciągłe* $c : T \longrightarrow X$ *i* $r : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *że dla każdego* $t \in T$ *zbiór*

$$R(t) = P(t) \cap B(c(t), r(t)) \neq \emptyset.$$

*Wtedy* $R : T \longrightarrow co(X)$ *ma ciągły selektor .*

## 6. Multifunkcje mierzalne

Niech $T$ będzie danym zbiorem z $\sigma - cialem$ $\Sigma$ mierzalnych podzbiorów $T$, zaś $X$ oraz $Y$ będą przestrzeniami topologicznymi.

**Definicja 18.** *Multifunkcja* $P : T \rightsquigarrow X$ *nazywa się* $\Sigma-$*mierzalna* (*lub krótko mierzalna*), *jeśli dla każdego zbioru otwartego* $U \subset X$ *zbiór* $P_-(U) \in \Sigma$.

**Przykład 19.** *Multifunkcja* $P(t) = \{p(t)\}$ *z* $p : T \longrightarrow X$ *jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $p$ *jest funkcją mierzalną.*

Inne przykłady będą podane poniżej. Przedstawimy również pewne charakteryzacje mierzalności multifunkcji i ich własności. Zaczniemy od

**Stwierdzenie 20.** *Następujące warunki są równoważne:*
(*i*) $P : T \rightsquigarrow X$ *jest mierzalna;*
(*ii*) *dla każdego zbioru domkniętego* $F \subset X$ *zbiór*

$$P^-(F) \in \Sigma.$$

*W przypadku, gdy* $(X, d)$ *jest ośrodkową przestrzenią metryczną to oba waunki są równoważne następującemu:*
(*iii*) *dla każdej kuli otwartej* $B(x, r)$ *zbiór*

$$P^-\{B(x, r)\} \in \Sigma.$$

**Uwaga 21.** *Zauważmy, że, multifunkcja* $P : T \rightsquigarrow X$ *jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\overline{P} : T \longrightarrow cl(X)$, *dana przez* $\overline{P}(t) = clP(t)$, *jest mierzalna.*

W przestrzeniach metrycznych $(X, d)$ pojęcie mierzalności odwzorowań wielowartościowych można wyrazić w terminach metryki $d$. Mamy mianowicie:

**Stwierdzenie 22.** *Multifunkcja $P : T \rightsquigarrow X$ jest $\Sigma -$ mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek:*
*odwzorowanie $t \longrightarrow dist\,(x, P\,(t))$ jest $\Sigma -$ mierzalne dla dowolnych $x \in X$.*

**Uwaga 23.** *Zauważmy, że dla każdego $t \in T$ odwzorowanie $x \longrightarrow dist\,(x, P\,(t))$ jest ciągłe. W sytuacji, gdy $\Sigma = \mathcal{L}$ wystarczy to formułować następująco:*
*odwzorowanie $x \longrightarrow dist\,(x, P\,(t))$ jest ciągłe dla p.w. $t \in T$.*

Mierzalne multifunkcje posiadają **bogatszą strukturę** niż odwzorowania punktowe. Główne ich własności prezentujemy poniżej.

**Stwierdzenie 24.** *Niech $r : T \longrightarrow R$, $p_n : T \longrightarrow X$ i $P_n : T \rightsquigarrow X$ będą danymi odwzorowaniami mierzalnymi ($n = 0, 1, 2, ...$), zaś $\omega : X \longrightarrow Y$ funkcją ciągłą. Wtedy odwzorowania*

$$P\,(t) = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n\,(t)\,,$$

$$Q\,(t) = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n\,(t)\,,$$

$$C\,(t) = cl\,\{p_n\,(t) : n = 0, 1, 2, ...\}\,,$$

*i*

$$\omega\,(P)\,(t) = \omega\,\{P\,(t)\}$$

*są również mierzalne.*

**Przykład 25.** *Multifunkcja $I\,(t) = [a\,(t)\,, b\,(t)]$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowania $a = a\,(\cdot)$ i $b = b\,(\cdot)$ są mierzalne.*

## 7. Mierzalne selektory

Przypomnijmy, że selektorem multifunkcji $P : T \rightsquigarrow X$ nazywamy każde odwzorowanie $p : T \longrightarrow X$, że

$$p\,(t) \in P\,(t) \quad dla \quad każdego \quad t \in T.$$

Jeżeli $p$ jest mierzalna (ciągła) to wtedy mówimy o mierzalnej (ciągłym) selektorze odwzorowania $P$.

W przypadku zwartej przestrzeni Hausdorffa $T$ z $\sigma - cialem$ $\mathcal{L}$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a danym przez miarę Radona $\mu$, przez mierzalną selektor rozumiemy również odwzorowanie mierzalne $p : T \longrightarrow X$ takie, że

$$p\,(t) \in P\,(t) \;\; dla \; prawie \; wszystkich \;\; (p.w.) \;\; t \in T.$$

W teorii mierzalnych selektorów podstawowy wynik należy do Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego. My formułujemy go następująco:

**Twierdzenie 26.** **[Kuratowski & Ryll-Nardzewski]** *Załóżmy, że $P : T \longrightarrow cl\,(X)$ jest multifunkcją mierzalną przyjmującą wartości w przestrzeni polskiej $X$. Wtedy $P$ posiada mierzalną selektor .*

**Dowód:** Prezentowany poniżej dowód składa się, podobnie jak w przypadku twierdzenia Michaela, z trzech etapów. Etapy II i III są prawie identyczne, a etap I bazuje na podobnej idei, ale używa się innych argumentów. Przede wszystkim zauważmy, że można przechodząc do metryki równoważnej zakładać, iż średnica

$$\delta (X) = \sup \{dist (x, y) : x, y \in X\} \leq 1.$$

Wtedy etapy konstrukcji są następujące:

**Etap 1.** dla danego $\varepsilon > 0$ skonstruujemy mierzalną funkcję $p : T \longrightarrow X$ taką, że

$(a)$ $R (t) = P (t) \cap B \{p (t) , \varepsilon\} \neq \emptyset$ oraz

$(b)$ multifunkcja $R$ jest mierzalna;

**Etap 2.** Pokazujemy istnienie dwóch ciągów: odwzorowań mierzalnych $p_n : T \longrightarrow X$ i $P_n : T \longrightarrow cl (X)$ mających dla każdego $t \in T$ i $n = 1, 2, ...$ następujące własności:

$(c)$ $dist (p_n (t) , P_n (t)) \leq \frac{1}{2^n}$; i

$(d)$ $P_{n+1} (t) \subset P_n (t) \subset P (t)$.

**Etap 3.** Wykazujemy, że $p_n \to p$ i stąd $p$ okazuje się szukanym selektorem.

■

Twierdzenie Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego 26 zostało opublikowane w 1965 roku. Niedługo potem ukazała się praca Ch. Castainga, która jest uzupełnieniem twierdzenia. U jej podstaw leży poprzednio zrobiona obserwacja, że dla ciągu funkcji mierzalnych $p_n : T \longrightarrow X$, $n = 1, 2, ...$ multifunkcja

$$P (t) = cl \{p_n (t) : n = 1, 2, ...\} \tag{5}$$

jest mierzalna.

**Definicja 27.** *Każdą rodzinę funkcji mierzalnych* $p_n : T \longrightarrow X$, $n = 1, 2, ...$ *spełniających (5) nazywamy się reprezentacją Castainga multifunkcji* $P : T \longrightarrow cl (X)$.

Sytuacja powyższa może być w pewnym sensie odwrócona. Mamy mianowcie następującą charakteryzację multifunkcji mierzalnych przy pomocy mierzalnych selektorów:

**Twierdzenie 28. [Castaing]** *Multifunkcja* $P : T \longrightarrow cl (X)$ *jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada ona reprezentację Castaing'a przy użyciu przeliczalnej rodziny mierzalnych selektorów*

$$p_n : T \longrightarrow X, \quad n = 1, 2, ....$$

**Wniosek 29.** *Niech* $P : T \longrightarrow cl (X)$ *będzie mierzalnym odwzorowaniem wielowartościowym. Wtedy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taki zbiór zwarty* $T_\varepsilon \subset T$, *że* $\mu (T \backslash T_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *oraz* $P$ *obcięta do* $T_\varepsilon$ *jest ciągła.*

W zastosowaniach wykorzystywane będą wyniki dotyczące istnienia takich selektorów dla multifunkcji dwóch zmiennych (właściwie: złożeń z funcjami):

**Lemat 30.** *Niech* $v \in C (I, E)$ *i odwzorowanie* $F : I \times E \to 2^E$ *spełnia założenia:*

(i) *dla każdego* $z \in E$ *odwzorowanie* $t \mapsto F (t, z)$ *ma mierzalny selektor,*

(ii) *dla każdego* $t \in I$ *odwzorowanie* $z \mapsto F(t, z)$ *jest* $\omega - seq$ *uhc,*

(iii) *odwzorowanie* $f$ *ma niepuste, domknięte i wypukłe wartości,*

(iv) *istnieje funkcja* $a \in L^1 (I, R)$, *że dla prawie wszystkich* $t \in I$ *i* $z \in E$, $\|F (t, z)\| \leq a (t)$.

*Wówczas odwzorowanie* $t \mapsto F (t, v (t))$ *ma mierzalny (całkowalny) selektor* $u_0$, $u_0 (t) \in F (t, v (t))$ *dla prawie wszystkich* $t \in I$.

## 8. Całki wielowartościowe

8.1. **Wielowartościowa całka Riemanna [Dinghas, 1957].** Konstrukcja oparta o sumy Riemanna: sumy algebraiczne Minkowskiego zbiorów oraz metryka Hausdorffa.

8.2. **Całka Aumanna [Aumann].** Wykorzystanie selektorów całkowalnych (mierzalnych) multifunkcji $F$:

$$(A)\int_I F(s)\,ds = \{\int_I f(s)\,ds : f - \text{mierzalny selektor } D\}$$

8.3. **Całka Debreu [Debreu].** Twierdzenia Rådströma i Hörmandera .... Utożsamimy wartości multifunkcji (zbiory) z **elementami** pewnej przestrzeni, tam wykorzystamy całkę z funkcji wektorowej i "wracamy" poprzez zanurzenie do rodziny zbiorów...

**R -** ($A$ - niepusty, zwarty i wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej $X$ ($i$ - izometria $X$ ze stożkiem wypukłym $Y$ w przestrzeni unormowanej $Z$ - rodzina zbiorów rozpatrywana z metryką Hausdorffa)

**H -** ($A$ - niepusty, domknięty, ograniczony, wypukły podzbiór lokalnie wypukłej $X$ ($i$ - włożenie $X$ w $Y$) oraz

$$i(A) = \sigma(\cdot, A)$$

## 9. Punkty stałe odwzorowań z wypukłymi wartościami

9.1. **Przypadek odwzorowań punktowych.** Teoria punktów stałych dla funkcji $p : X \longrightarrow X$ może być przeniesieona na odwzorowania wielowartościowe $P : X \rightsquigarrow X$. Powiemy, że $x \in X$ jest punktem stałym $P$ jeżeli

$$x \in P(x).$$

Taka teoria jest używana w wielu dziedzinach matematyki, głównie w analizie nieliniowej, inkluzjach różniczkowych i teorii sterowania. Istnieje mnóstwo wyników dotyczących tego tematu i nie jest naszym celem dać kompendium tej wiedzy. Podamy tylko najważniejsze i najczęściej wykorzystywane. Będziemy zakładać, że zbiory $P(x)$ są wypukłe. Należy stwierdzić, że w teorii punktu stałego dla multifunkcji kluczową rolę odgrywają selektory. Użycie ich pozwala bowiem zredukować problem do przypadku jednopunktowego. Spośród wszystkich twierdzeń o punktach stałych przypomnijmy następujące:

**Twierdzenie 31** (Schauder)**.** *Niech $K$ będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha $X$. Wtedy każde odwzorowanie ciągłe $f : K \longrightarrow K$ posiada punkt stały.*

Należy podkreślić, że oba założenia wypukłości i zwartości są istotne. Istnieją uogólnienia na dowolne zbiory $K \in clco(X)$, ale wymagają one założeń zwartości funkcji $f$. Przypomnijmy, że $f : X \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem zwartym, jeżeli jest ciągłe i zbiór $f(X)$ jest warunkowo zwarty (totalnie ograniczony).

**Twierdzenie 32.** *Niech $K$ będzie domkniętym wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha $X$. Wtedy każde odwzorowanie zwarte $f : K \longrightarrow K$ posiada punkt stały.*

Drugim niezbędnym twierdzeniem dla funkcji jest twierdzenie Banacha (o kontrakcji) - por. podręczniki z analizy matematycznej!!!

9.2. **Przypadek wielowartościowy.** Twierdzenia o punktach stałych mają swoje odpowiedniki dla odwzorowań półciągłych z dołu i z góry. Dla półciągłych z dołu jest to łatwe zastosowanie ciągłych selektorów.

**Twierdzenie 33** (M)**.** *Niech $Z$ będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha $X$. Wtedy każde p.z.d. odwzorowanie $P : Z \longrightarrow clco\,(Z)$ posiada punkt stały.*

**Twierdzenie 34.** *Niech $Z$ będzie domkniętym wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha $X$. Wtedy każde p.z.d. odwzorowanie $P : Z \longrightarrow clco\,(Z)$ takie, że $P\,(Z)$ jest warunkowo zwarty posiada punkt stały.*

Metoda ciągłych selektorów może być również użyta dla odwzorowań półciągłych z góry, choć nie da się tego zrobić bezpośrednio. Półciągłość z góry nie gwarantuje bowiem istnienia ciągłych selektorów (odpowiednik twierdzenia Schaudera!):

**Twierdzenie 35.** [**Ky Fan**] *Niech $Z$ będzie* **zwartym** *i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha $X$. Wtedy każde półciągłe z góry odwzorowanie $P : Z \longrightarrow clco\,(Z)$ posiada punkt stały.*

Odpowiednikiem twierdzenia Banacha o kontrakcji dla multifunkcji jest **twierdzenie Covitz-Nadlera**:

**Twierdzenie 36.** *Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeżeli $N : X \to cl(X)$ jest kontrakcją ze względu na metrykę Hausdorffa tj istnieje stała $k < 1$ taka, że dla dowolnych $x, y \in X$*

$$h(N(x), N(y)) \leq k \cdot d(x, y),$$

*to $N$ posiada punkt stały.*

## 10. Inkluzje różniczkowe

Funkcję $x : I \longmapsto X$ będziemy nazywać absolutnie ciągłą (mild function), jeśli istnieje funkcja $u \in L^1\,(T, X)$ taka, że dla każdego $t \in I$ mamy

$$x\,(t) = a + \int_0^t u\,(s)\,ds.$$

Funkcję $u$ będziemy oznaczać przez $x'$ i nazywać pochodną. Musimy jednak być świadomi, że w dowolnych przestrzeniach Banacha klasyczna definicja absolutnej ciągłości nie gwarantuje istnienia pochodnej. Dzieje się tak tylko w przestrzeniach Banacha posiadających własność Radona-Nikodyma, w szczególności w $R^l$.

Inkluzją różniczkową nazywamy relację

$$x' \in F\,(t, x)\,,$$

gdzie $F : I \times X \longrightarrow N\,(X)$ jest danym odwzorowaniem wielowartościowym. Jeśli żądamy, by $x\,(0) = \zeta$ to mówimy o zagadnieniu Cauchy'ego

$$\begin{aligned} x' &\in F\,(t, x)\,, \\ x\,(0) &= \zeta. \end{aligned} \tag{6}$$

Rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (6) nazywamy funkcję absolutnie ciągłą $x : I \longmapsto X$ taką, że

$$x'\,(t) \in F\,(t, x\,(t)) \quad p.w. \;\; w \;\; I$$

oraz

$$x(0) = \zeta.$$

Łącznie z (6) rozważamy tzw. "zrelaksowane" inkluzje różniczkowe

$$\begin{aligned} x' &\in clcoF(t,x), \\ x(0) &= \zeta. \end{aligned} \tag{7}$$

Ogólnie: mamy 3 główne metody rozwiązywania zagadnień dla inkluzji różniczkowych:

1. Zastosowanie teorii wielowartościowych punktów stałych.
2. Sprowadzenie do równań ró.zniczkowych poprzez twierdzenia selekcyjne.
3. Zastosowanie twierdzenia Baire'a o kategoriach.

10.1. **Zastosowanie teorii wielowartościowych punktów stałych.** Zauważmy, że $x$ jest rozwiązaniem problemu (6) wtedy, gdy $u = x'$ jest punktem stałym odwzorowania wielowartościowego

$$K : L^1(T,X) \longmapsto dcl(T,X)$$

danego wzorem

$$K(u) = \left\{ w \in L^1(T,X) : w(t) \in F(t,u(t)) \quad p.w. \ w \quad I \right\}.$$

Badanie zatem własności rozwiązań danej inkluzji sprowadza się do badania zbioru punktów stałych $\mathcal{F}ix(K)$.

**Inkluzje z prawą stroną półciągłą z góry**

Rozpatrzmy teraz zagadnienie

$$x'(t) \in F(t,x(t)), \quad x(0) = \zeta. \tag{8}$$

O prawej stronie $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ będziemy zakładać, że

$(G1)$ dla każdego $x \in R^l$ multifunkcja $t \longrightarrow F(t,x)$ jest mierzalna;
$(G2)$ dla każdego $t \in I$ multifunkcja $x \longrightarrow F(t,x)$ jest $p.z.g.$;
$(G3)$ istnieje funkcja $p \in L^1(I)$ taka, że dla każdego $x \in R^l$ mamy

$$\sup\{|z| : z \in F(t,x)\} \le p(t) \quad p.w. \quad w \quad I.$$

**Twierdzenie 37.** *Załóżmy, że $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ spełnia warunki $(G1), (G2)$ i $(G3)$. Wtedy dla każdego $\zeta \in R^l$ zagadnienie (11) ma rozwiązanie.*

*Proof.* Idea dowodu: niech

$$S = \left\{ \begin{array}{c} s \in AC\left(I,R^l\right) : |s'(t)| \le p(t) \quad p.w. \ w \ I \\ oraz \quad s(0) = \zeta \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Zbiór $S \subset C\left(I,R^l\right)$ jest zwarty i wypukły. Określmy multifunkcję

$$K : S \longrightarrow clco\left(L^1\left(I,R^l\right)\right)$$

wzorem

$$K(s) = \left\{ \begin{array}{c} u \in AC\left(I,R^l\right) : u'(t) \in F(t,s(t)) \\ p.w. \ w \ I \quad oraz \quad u(0) = \zeta \end{array} \right\}. \tag{10}$$

Sprawdzamy założenia Kakutaniego (Ky Fana) o punkcie stałym i otrzymać punkt stały $s \in K(s)$. Łatwo sprawdić, że $s$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (11). $\square$

Można udowodnić, że zagadnienie (11) ma rozwiązanie, jeśli o $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ zakładać, że spełnia warunki $(G1), (G2)$ oraz

$(G3)'$ istnieją funkcje $p \in L^1(I)$ i $q \in L^\infty(I)$ takie, że dla każdego $x \in R^l$ mamy
$$\sup\{|z| : z \in F(t,x)\} \le p(t) + q(t)|x| \quad p.w. \quad w \quad I.$$

### Inkluzje z prawą stroną półciągłą z dołu

Zajmiemy się teraz zagadnieniem

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(0) = \zeta, \tag{11}$$

gdzie prawa strona spełnia warunki:

$(D1)$ $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ jest multifunkcją łącznie mierzalną;

$(D2)$ dla każdego $t \in I$ multifunkcja $x \longrightarrow F(t,x)$ jest *p.z.g.*;

$(D3)$ istnieje funkcja $p \in L^1(I)$ taka, że dla każdego $x \in R^l$ mamy
$$\sup\{|z| : z \in F(t,x)\} \le p(t) \quad p.w. \quad w \quad I.$$

**Twierdzenie 38.** *Załóżmy, że $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ spełnia warunki $(D1), (D2)$ i $(D3)$. Wtedy dla każdego $\zeta \in R^l$ zagadnienie (11) ma rozwiązanie.*

*Proof.* Podobna idea:
$$S = \left\{ \begin{array}{c} s \in AC\left(I, R^l\right) : |s'(t)| \le p(t) \quad p.w. \ w \ I \\ oraz \quad s(0) = \zeta. \end{array} \right\}.$$
i
$$K(s) = \left\{ \begin{array}{c} u \in AC\left(I, R^l\right) : u'(t) \in F(t, s(t)) \quad p.w. \ w \ I \\ oraz \quad u(0) = \zeta. \end{array} \right\}$$
$S \subset C\left(I, R^l\right)$ jest zbiorem zwartym i wypukłym, dla każdego $s \in S$ zbiory $K(s)$ są domknięte i wypukłe oraz $K(s) \subset S$, a $K : S \longrightarrow clcoS$ jest półciągła z dołu.

Ustalmy $s_0 \in S$, $s_n \longrightarrow s_0$,, $u_0 \in K(s_0)$. Dowidzimy, że istnieją $u_n \in K(s_n)$ takie, że $u_n \longrightarrow u_0$. Niech $v_n$ będą takimi funkcjami mierzalnymi, że dla każdego $t \in T$
$$v_n(t) \in F(t, s_n(t))$$
oraz
$$|v_n(t) - u_0'(t)| = d\left(u_0'(t), F(t, s_n(t))\right).$$
Z uwagi na $(D3)$ mamy $|v_n(t)| \le p(t)$ *p.w. w I* oraz z $(D2)$ oraz
$$\begin{aligned} & \limsup |v_n(t) - u_0'(t)| \\ = \ & \limsup d\left(u_0'(t), F(t, s_n(t))\right) \\ \le \ & d\left(u_0'(t), F(t, s_0(t))\right) = 0 \quad p.w. \ w \ I. \end{aligned}$$
Z twierdzenia Lebesgue'a mamy zatem
$$v_n \longrightarrow u_0' \quad w \quad L^1\left(I, R^l\right).$$
Łatwo sprawdzić, że naturalnym kandydatami są w tej sytuacji funkcje $u_n \in K(s_n)$ takie, że
$$\begin{aligned} u_n' &= v_n, \\ u_n(0) &= \zeta \end{aligned}$$
i że rzeczywiście ciąg $\{u_n\}$ spełnia żądany warunek. Zatem odwzorowanie $K : S \longrightarrow clcoS$ posiada punkt stały $s$ i jest on rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (11). □

10.2. **Lemat Filippova i zbiory rozwiązań.** Będziemy teraz rozważali inkluzje różniczkowe

$$\left\{ \begin{array}{c} x' \in F(t,x) \\ x(0) = \zeta \end{array} \right. . \tag{12}$$

O multifunkcji $F : I \times X \longrightarrow cl(X)$ będziemy zakładać, że ma ona następujące własności:

*i.* $F$ jest $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(X) - mierzalna$ po $(t,x)$;

*ii.* istnieje funkcja $l \in L^1(I, R^+)$ taka, że dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi nierówność

$$d_H(F(t,x_1), F(t,x_2)) \leq l(t)|x_1 - x_2| \quad p.w. \quad w \quad I;$$

*iii.* dla każdego $(\zeta, z) \in L^1(I,X)$ istnieje $\beta = \beta_{\zeta,z} \in L^1(I,R)$ taka, że

$$d_H(z(t), F(t, \mathcal{I}(\zeta,z)(t))) \leq \beta(t) \quad p.w. \quad w \quad I.$$

Naszym celem jest zbadanie własności zbioru rozwiązań $\mathcal{R}$ zagadnienia (12).

Dla sformułowania Lematu Filippova oznaczmy

$$m(t) = \int_0^t l(\tau)\, d\tau.$$

**Twierdzenie 39** (Filippov Lemma)**.** *Załóżmy, że $F : I \times X \longrightarrow cl(X)$ spełnia warunki $i. - ii$ i $iii_0$. oraz rozważmy funkcje $z \in AC(I,X)$ i $\beta \in L^1(T,R)$ spełniające nierówność*

$$d_H(z'(t), F(t, z(t))) \leq \beta(t) \quad p.w. \quad w \quad I.$$

*Wtedy dla każdych $\zeta \in X$ i $\varepsilon \in R^+$ istnieje $u \in L^1(I,X)$ taka, że funkcja*

$$v = \mathcal{I}(\zeta, u) = \zeta + \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

*jest rozwiązaniem (12) spełniającym warunki:*

*a)*

$$|z'(t) - v'(t)| \leq$$
$$\leq \varepsilon + l(t)\exp\{m(t)\} + l(t)|z(0) - \zeta| +$$
$$+ l(t)\int_0^t \beta(\tau)\exp\{m(t) - m(\tau)\}\, d\tau + \beta(t) \quad p.w. \quad w \quad I;$$

*oraz*

*b)*

$$|z(t) - v(t) - (z(0) - \zeta)| \leq$$
$$\leq \{\varepsilon + |z(0) - \zeta|\}\exp\{m(t)\} +$$
$$+ \int_0^t \beta(\tau)\exp\{m(t) - m(\tau)\}\, d\tau.$$

Udowodnimy teraz klasyczne twierdzenie Filippova-Ważewskiego, że zbiór $\mathcal{R}_F$ rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (12)

$$\begin{cases} u' \in F(t,u), \\ u(0) = \zeta \end{cases}$$

jest gęsty w zbiorze $\overline{\mathcal{R}} = cl\mathcal{R} = \mathcal{R}_{clc}$ rozwiązań "zrelaksowanego (uwypuklonego)" zagadnienia

$$\begin{cases} u' \in clcoF(t,u) \\ u(0) = \zeta \end{cases} . \tag{13}$$

Bęziemy zakładać, że $F : I \times R^k \longrightarrow cl\left(R^k\right)$ spełnia warunki $i., ii$ i $iii_0$, a ponadto

*iv.* istnieje $p \in L^1(I,R)$ taka, że dla każdego $s \in S$

$$\sup\{|u| : u \in F(t,x)\} \le p(t) \quad a.e.\ w \quad I.$$

Oznaczmy przez $\overline{\mathcal{R}}$ zbiór rozwiązań dla (13). Wtedy

**Twierdzenie 40** (Filippov-Ważewski)**.** *Załóżmy, że $F : I \times X \longrightarrow cl(X)$ spełnia warunki $i., ii, iii_0$ i $iv.$ i niech $\zeta \in X$. Wtedy dla każdego $\overline{r} \in \overline{\mathcal{R}}$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje rozwiązanie $r \in \mathcal{R}$ spełniające oszacowanie*

$$\|\overline{r} - r\|_C \le \varepsilon M.$$

10.3. **Sprowadzenie do równań różniczkowych - poprzez twierdzenia selekcyjne.** Najbardziej banalne zastosownia dotyczą wykorzystania twierdzenia Michaela i twierdzenia Peano.

Znacznie ciekawsze są prace Bressana bazujące na konstrukcji selektorów kierunkowo ciągłych (rozwiązania Carathéodory'ego): najkrócej mówiąc można pominąć założenie wypukłości wartości $F$!!

Tym razem odeślę do pracy magisterskiej o selektorach kierunkowo ciągłych (po polsku!!): K. Leśniak (UMK Toruń) - plik PostScript:

**http://www-users.mat.umk.pl/ much/WORKS/ABressan.ps** (Rozdział 4)

...............

10.4. **Zastosowanie twierdzenia Baire'a o kategoriach.** Cellina: porównanie zbiorów rozwiązań dla $S_2$:

$$x'(t) \in \{-1,1\}\ ,\ x(0) = 0$$

oraz $S_1$

$$x'(t) \in [-1,1]\ ,\ x(0) = 0.$$

(tj. $S_2$ jest zbiórem rezydualnym w $S_1$).

Rozpatrujemy:

$$\begin{cases} x' \in F(t,x) \\ x(0) = \zeta \end{cases} . \tag{14}$$

oraz

$$\begin{cases} x' \in \partial F(t,x) \\ x(0) = \zeta \end{cases} . \tag{15}$$

Mamy:

**Twierdzenie 41.** *Zakładamy, że* $F : I \times K(x_0, r) \to cc(\mathbb{R}^k)$ *jest ciągła w sensie Hausdorffa ograniczna przez* $M < r$ *oraz, że* **wartości** $F(t,x)$ **mają niepuste wnętrza:** $intF(t,x) \neq \emptyset$**.**

*Wtedy zagadnienia* (14) *i* (15) *mają niepuste zbiory rozwiązań oraz zbiór* $S_2$ *dla* (15) *jest rezydualnym pozdbiorem dla* $S_1$ *(czyli* (14)*).*

## 11. Symbole

$(X,d) - przestrzeń\ metryczna$;
$(X, \|\cdot\|)$ -przestrzeń unormowana;
$\mathbb{R}$ - *zbiór liczb rzeczywistych*;
$\mathbb{C}$ $-$ *zbiór liczb zespolonych*;
$\mathbb{R}^n$ $-$ *przestrzeń euklidesowa*;
$I = [0,1]$ $-$ *odcinek w* $\mathbb{R}$;
$clA$ $-$ *domknięcie zbioru* $A$;
$IntA$ $-$ *wnętrze zbioru* $A$;
$coA-$ *uwypuklenie* (*obwiednia wypukła*) *zbioru* $A$;
$clcoA-$ *domknięte uwypuklenie* (*domknięta obwiednia wypukła*) *zbioru* $A$;
$N(X)$ $-$ *rodzina niepustych podzbiorów zbioru* $X$;
$cl(X)$ $-$ *rodzina domkniętych niepustych podzbiorów zbioru* $X$;
$b(X)$ $-$ *rodzina ograniczonych niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej* $(X,d)$;
$bcl(X)$ $-$ *rodzina domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni metrycznej* $(X,d)$;
$c(X)$ $-$ *rodzina zwartych niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej* $(X,d)$;
$co(X)$ $-$ *rodzina wypuklych niepustych podzbiorów przestrzeni unormowanej* $(X, \|\|)$;
$clco(X)$ - rodzina wypukłych i domknietych podzbiorów *przestrzeni unormowanej* $(X, \|\|)$;
$cc(X)$ -rodzina wypukłych i zwartych podzbiorów *przestrzeni unormowanej* $(X, \|\|)$;
$\underline{B}(x,r)$ - kula *otwarta w przestrzeni metrycznej* $(X,d)$ *o środku* $x$ *i promieniu* $r$;
$\overline{B}(x,r)$ -kula *domknięta w przestrzeni metrycznej* $(X,d)$ *o środku* $x$ *i promieniu* $r$;
$dist(x,A) = \inf\{dist(x,a) : a \in A\}-$ *odległość punktu* $x$ *od zbioru* $A$;
$e(A,B) = \sup\limits_{a \in A} dist(a,B)$;
$h(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}-$ *metryka Hausdorffa*;
$P : T \rightsquigarrow X$, $P : T \to N(X)-$ *multifunkcja ze zbioru* $T$ *w podziory* $X$
$P_-(A) = \{t : P(t) \cap A \neq \emptyset\}$ $-$*przeciwobraz* $(z\ -)$ *zbioru* $A$ *przez multifunkcję* $P$;
$P_-(A) = \{t : P(t) \subset A\}-$ *przeciwobraz* $(z\ +)$ *zbioru* $A$ *przez multifunkcję* $P$;
$P(A) = \bigcup\limits_{x \in A} P(x)$ $-$ *obraz zbioru* $A$ *przez multifunkcję* $P$;
$\sigma_A(x^*) = \sigma(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in A\} - funkcja\ podparcia\ zbioru\ A$;
$\sigma_P(t, x^*) = \sigma_{P(t)}(x^*) - funkcja\ podparcia\ multifunkcji\ \ P(t)$;

## References


[1] J.-P. Aubin, A. Celina, *Differential Inclusions* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984).
[2] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis* (Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, New York, 1984).
[3] A. Bressan and G. Colombo, Extensions and selections of maps with decomposable values, Studia Math. 90 (1988), 69-86.
[4] A. Fryszkowski, Teoria multifunkcji, w przygotowaniu.
[5] A. Fryszkowski, Fixed Point Theory for Decomposable Sets, Kluwer, 2004.
[6] D. Repovš and P.V. Semenov, Continuous Selections of Multivalued Mappings, Kluwer, 1998.
[7] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Mathematics and Its Applications Vol. 268, Springer, 1993.

[8] G. Beer, *On convergence of closed sets in a metric space and distance functions*, Bull. Austral. Math. Soc 31 (1985), 421–432.

[9] G. Beer, *On the compactness theorem for sequences of closed sets*, Math. Balcanica 16 (2002), 327–338.

[10] G. Beer, *Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets*, Bull. Australian Math. Soc. 35 (1987), 81–96.

[11] G. Beer, J. Rodríguez-López, *Topologies sequentially equivalent to Kuratowski-Painlevé convergence*, in: Applied Topology: Recent progress for Computer Science, Fuzzy Mathematics and Economics, 2010, pp. 7–13.

[12] G. Beer, J. Rodríguez-López, *Topologies associated with Kuratowski-Painlevé convergence of closed sets*, J. Convex Anal. 17 (2010), 805-826.

[13] E. Duke, K. Hall and R. Oberste-Vorth, *Changing time scales I: The continuous case as a limit*, Proceedings of the Sixth WSEAS International Conference on Applied Mathematics, WSEAS, Athens, 2004.

[14] Z.M. Fang, S.J. Li, and K.L. Teo, *Painleve-Kuratowski convergences for the solution sets of set-valued weak vector variational inequalities*, J. Inequal. Appl. 2008.1 (2008), Article ID 435719.

[15] P.E. Kloeden, *Upper semicontinuous dependence of pullback attractors on time scales*, J. Difference Equ. Appl. 12 (2006), 357–368.

[16] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I.*, Academic Press, 1966.

[17] B. Lawrence, R. Oberste-Vorth, *Solutions of dynamic equations with varying time scales*, in: Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials (2007), pp. 452–461.

[18] R. Lucchetti, A. Torre, *Classical set convergences and topologies*, Set-Valued Analysis 2 (1994), 219–240.

[19] T. Nogura, D. Shakhmatov, *When does the Fell topology on a hyperspace of closed sets coincide with the meet of the upper Kuratowski and the lower Vietoris topologies?*, Topology Appl. 70 (1996), 213–243.

[20] R. Oberste-Vorth, *The Fell topology on the space of time scales for dynamic equations*, Adv. Dyn. Syst. Appl 3 (2008), 177–184.

[21] R. Oberste-Vorth, *The Fell topology for dynamic equations on time scales*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory 9 (2009), 407–414.

[22] K. Deimling, *Multivalued Differential Equation* (Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992).