ODWZOROWANIA WIELOWARTOŚCIOWE.

Wykład specjalizacyjny.

2016

dr Mieczysław Cichoń

Pojęcia, definicje i twierdzenia wprowadzone w ramach przedmiotów wymienionych we wskazaniach będą przypominane bez rozwijania tematu - ewentualne zaległości słuchacze muszą samodzielnie uzupełnić.

Poniżej podany jest zakres materiału omawianego w ramach wykładu. Kolejność i sposób jego wprowadzania dla wygody słuchaczy przypominać będą klasyczny kurs analizy rzeczywistej i omówione zostaną szczegółowiej podczas pierwszego wykładu. kade z pojęć analizy wielowartośiowej będzie porównywane ze definicjami znanymi z klasycznej analizy.

- (1) Pojęcie odwzorowania wielowartościowego (multifunkcji). Przeciwobrazy. Odwzorowania odwrotne. Naturalne przykłady i realizacje (odwzorowania odwrotne, nierówności, parametryzacje itp.). Wprowadzenie w analizę wielowartościową.
- (2) Analiza wielowartościowa:
  - metryka Hausdorffa na rodzinach zbiorów,
  - ciągi zbiorów i ich granice,
  - granica Kuratowskiego ciągu zbiorów, inne pojęcia granic (granice w teorii mnogości, w przestrzeni topologicznej, metrycznej i unormowanej),
  - wzajemne reacje pomędzy różnymi pojęciami granic.
- (3) Ciągłość i mierzalność multifunkcji:
  - multifunkcje ciągłe i półciągłe, związki z definicami dla funkcji,
  - zależności między półciągłościami multifunkcji, półciągłści a przeciwobrazy i ciągi zbiorów,
  - przypadki szczególne - ciągłości funkcji,
  - multifunkcje mierzalne.
- (4) Selektory:
  - pojęcie selektora, istnienie selektora,
  - selektory mierzalne,
  - twierdzenie Kuratowskiego - Ryll-Nardzewskiego,
  - selektory ε -przybliżone,
  - selektory ciągłe (tw. Michaela),
  - selektory Carathéodory'ego,
  - selektory minimalne.
- (5) Punkty stałe odwzorowań wielowartościowych:
  - pojęcie punktu stałego,
  - tw. Ky-Fana,

- tw. Kakutani'ego,
- funkcje - przypadki szczególne.

- (6) Całka Aumanna z multifunkcji (uogólnienie operacji całkowania na multifunkcje - definicja i podstawowe własności). Inne całki wielowartościowe i ich wzajemne relacje. Porównanie z definicjami całek dla funkcji.
- (7) Pochodne wielowartościowe (subróżniczka, stożki styczne, wykres multifunkcji, pochodne wielowartościowe).
- (8) Inkluzje różniczkowe: przykłady i zastosowania - w zależności od czasu...
- (9) Zastosowania inkluzji różniczkowych w teorii optymalnego sterowania. Viabilność. Inne zastosowania.

Literatura:
J.-P.Aubin, H.Frankowska "Set-Valued Analysis", Ch.Castaign, M.Valadier "Convex Analysis and Measurable Multifunction", M. Kisielewicz "Differential Inclusions and Optimal Control", K.Deimling "Multivalued Differential Equations", **A. Fryszkowski "Teoria Multifunkcji",** G. Beer "Toplogies on Closed and Closed Convex Sets" R. Engelking "Topologia Ogólna", K.Kuratowski "Wstęp do teorii mnogości i topologii", A.Pelczar "Wstęp do teorii równań różniczkowych cz. 2" itd. (inne pozycje (jęz. rosyjskim lub francuskim) - dla zainteresowanych).

Jeśli nie zaznaczono inaczej, to przez X, Y ... oznaczać będziemy przestrzenie topologiczne. (Na ogół podana też będzie szczególna postać definicji lub twierdzenia w przestrzeni Banacha E lub wręcz w przestrzeni R^n).

Przez 2^X oznaczać będziemy rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru X.

Definicja 1. Odwzorowaniem wielowartościowym (multifunkcją, funkcją wielowartościową) $F : X \to 2^Y$ nazywamy odwzorowanie przyporządkowywujące elementom zbioru X podzbiory zbioru Y.

W szczególności mogą być to zbiory jednoelementowe, a więc każda funkcja jest multifunkcją.

Należy zwrócić uwagę, że dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$ odwzorowanie f^{-1} ($f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$) jest multifunkcją, a dla funkcji odwzorowanie odwrotne istnieje jedynie dla funkcji różnowartościowych. Nie ma też ograniczeń znanych z definicji funkcji $arcsin(x)$. Jest to najprostszy znany ze szkoły przypadek multifunkcji (nie ograniczamy dziedziny funkcji $sin(x)$ do przedziału długości π).

Zajmiemy się tu multifunkcjami na wzór klasycznej analizy matematycznej (funkcje), oraz uzupełnimy niezbędne wiadomości z rachunku zbiorów (ciągi zbiorów, granice itd.).

Tak więc w skróconej formie powtórzony zostanie materiał "klasycznej" analizy z poziomu I i II :

- multifunkcje i ich ciągłość,
- ciągi i granice zbiorów (metryka Hausdorffa),
- całka i mierzalność multifunkcji,
- pochodna (wielowartościowa),

- zagadnienia łączące funkcje i multifunkcje: selektory i punkty stałe.

Poza tym omówimy zalety takiego ujęcia analizy i zastosowania teorii multifunkcji, szczególnie w dziedzinie inkluzji różniczkowych (wielowartościowe równania różniczkowe) i sterowania optymalnego.

Literatura:

- J.-P.Aubin, H.Frankowska "Set-Valued Analysis",
- J.-P.Aubin, A.Cellina "Differential Inclusions",
- Ch.Castaign, M.Valadier "Convex Analysis and Measurable Multifunctions",
- E.Klein, A.C.Thompson "Theory of Correspondences",
- M.Kisielewicz "Differential Inclusions and Optimal Control",
- K.Deimling "Multivalued Differential Equations",
- G.Beer "Topologies on Closed and Closed Convex Sets"
- R.Engelking "Topologia Ogólna",
- K.Kuratowski "Wstęp do teorii mnogości i topologii",
- A.Pelczar "Wstęp do teorii równań różniczkowych cz. 2"