Układy funkcji ortogonalnych

Iloczyn skalarny w przestrzeniach funkcji ciągłych

WAGA

W przestrzeni liniowej funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ można określić iloczyn skalarny jako następującą całkę:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx\,,$$

gdzie $w(x)$ jest pewną ustaloną, nieujemną w przedziale $[a, b]$ funkcją ciągła, zwaną wagą iloczynu skalarnego. W najprostszym przypadku $w(x) = 1$ i wtedy mamy:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

Każda przestrzeń liniowa z określonym w niej iloczynem skalarnym jest jednocześnie przestrzenią unormowaną. W rozważanej powyżej przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$, norma jest określona następująco:

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)w(x)\,dx}\,.$$

Dwa elementy przestrzeni liniowej nazywamy ortogonalnymi jeśli zeruje się ich iloczyn skalarny. Ciąg nieskończony funkcji:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

tworzy układ ortogonalny, jeśli

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0\,,\ \text{jeśli}\ \ i \neq j\,.$$

Jeśli ponadto, dla każdego i spełniony jest warunek:

$$||\varphi_i|| = 1\,,$$

to układ taki nazywamy ortonormalnym.
Układy funkcji ortogonalnych i ortonormalnych ogrywają istotną rolę w teorii aproksymacji.

Układ trygonometryczny

Jednym z najprostszych do określenia układów ortogonalnych jest następujący układ funkcji trygonometrycznych:

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots$$

Ciąg ten tworzy układ ortogonalny w dowolnym przedziale o długości 2π, na przykład $[-\pi, \pi]$, dla iloczynu skalarnego z wagą $w(x) = 1$. Aby powyższy fakt wykazać, należy sprawdzić, że dla liczb naturalnych m, n takich, że $m \neq n$ spełnione są trzy równości:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, \cos nx\, dx = 0\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, \sin nx\, dx = 0\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, \cos nx\, dx = 0\,.$$

Wykażemy przykładowo pierwszą z nich.
W tym celu podstawimy w znanym wzorze trygonometrycznym:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = mx\,, \qquad \frac{\alpha-\beta}{2} = nx\,,$$

uzyskując równość:

$$\sin mx\,\cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}\,.$$

Zamieniliśmy zatem iloczyn funkcji trygonometrycznych na ich sumę co łatwo umożliwi nam całkowanie. Mamy więc:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sin(m+n)x + \cos(m-n)x\big)\,dx$$
$$= \frac{-1}{2(m+n)}\left[\cos(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\left[\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\,.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że 2π jest okresem funkcji sinus i cosinus.

Dwie pozostałe równości dowodzi się analogicznie przy pomocy wzorów trygonometrycznych:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Układ funkcji:

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots$$

jest więc układem ortogonalnym, ale nie ortonormalnym. Weźmy bowiem przykładowo:

$$||\cos x|| = \sqrt{\langle \cos x, \cos x \rangle} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx$$
$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Co ciekawe, dla dowolnej liczby naturalnej n, mamy:

$$||\cos nx|| = ||\sin nx|| = \pi \, ,$$

gdyż

$$||\cos nx|| = \sqrt{\langle \cos nx, \cos nx \rangle} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} \, dx$$
$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \, ,$$
$$||\sin nx|| = \sqrt{\langle \sin nx, \sin nx \rangle} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} \, dx$$
$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \, .$$

Powyższe, jednakowe wartości norm wszystkich funkcji naszego układu, dają nam możliwość "znormalizowania" go, poprzez podzielenie każdej funkcji przez $\sqrt{\pi}$. Uzyskamy wtedy układ ortonormalny:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ldots$$

Inna modyfikacja funkcji trygonometrycznych:

$$\cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ldots$$

powoduje, że dostajemy układ funkcji ortogonalnych na dowolnym przedziale postaci $[-l,l]$.

Wielomiany Legendre'a

Do niektórych rozważań w teorii aproksymacji funkcje trygonometryczne nie będą zbyt wygodnym narzędziem. Dlatego też często używa sie układów wielomianów ortogonalnych. Omówimy kilka przykładów takich układów. Ciąg wielomianów Legendre'a zdefiniowany jest następującym wzorem różniczkowym:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Można wykazać, że wielomiany Legendre'a spełniają poniższe równanie różniczkowe rzędu drugiego:

$$(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0\,,$$

a także następującą zależność rekurencyjną:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\,x\,P_n(n) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)\,.$$

Z powyższego wzoru rekurencyjnego najwygodniej znajdziemy kolejne wielomiany Legendre'a, pod warunkiem, że dwa początkowe $P_0(x)$ i $P_1(x)$

obliczymy ze wzoru definicyjnego. Mamy więc:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1\,, \\ P_1(x) &= x\,, \\ P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)\,, \\ P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,, \\ P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,, \\ P_5(x) &= \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\,. \end{aligned}$$

Wielomiany Legendre'a są ortogonalne w przedziale $[-1,1]$. dla iloczynu skalarnego z wagą $w(x) = 1$. Mamy bowiem następującą równość:

$$\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0\,, & m \neq m \\ \frac{2}{2n+1}\,, & m = n\,. \end{cases}$$

Wielomiany Czebyszewa I rodzaju

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są zdefiniowane następującym wzorem:

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\left[\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Wyjaśnienia wymaga symbol podwójnej silni (!!), określony dla naturalnych wartości k:

$$k!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots k & , k = 2n-1 \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots k & , k = 2n, \end{cases}$$

oraz dodatkowo: $(-1)!! = 0!! = 1$.

Mamy na przykład:

$5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5$,

$12!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$.

Patrząc na wzór (1) wcale nie widać od razu, że przedstawia on wielomian. Można to dopiero stwierdzić wykonując kolejne obliczenia dla poszczególnych wartości n. Mamy bowiem:

$$T_0(x) = (-1)^0 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)!!} \left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{(0)} = 1$$

$$T_1(x) = (-1)^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1)!!} \left[\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right]' = x$$

Niestety dla kolejnych wartości n obliczenia te sa zdecydowanie bardziej skomplikowane, głównie z powodu trudności z pochodną wyższego rzędu. Na szczęście są inne sposoby na wyznaczenie wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju. Można pokazać indukcyjnie, że definicja (1) jest równoważna następującemu równaniu różniczkowemu rzędu drugiego:

(2) $$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

oraz prawdziwy jest wzór rekurencyjny:

(3) $$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\,.$$

Znając już dwa początkowe wielomiany $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$ łatwo możemy, korzystając z powyższego wzoru rekurencyjnego, uzyskać postacie kilku następnych wielomianów Czebyszewa:

$$
\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1\,,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\,,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\,,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\,.
\end{aligned}
$$

Obserwując powyższe wielomiany oraz wzór (3) możemy wyciągnąć następujące wnioski:

- każdy wielomian T_n ma stopień n
- współczynnik przy x^n wielomianu T_n wynosi 2^{n-1}
- każdy wielomian T_n ma wyrazy o potęgach tylko parzystych albo tylko nieparzystych
- gdy n jest parzyste to wielomian T_n jest funkcją parzystą, a gdy n jest nieparzyste to wielomian T_n jest funkcją nieparzystą
- zera (miejsca zerowe) wielomianów T_n są położone symetrycznie względem punktu 0.

Dużo trudniejsze jest wykazanie, że wielomiany Czebyszewa I rodzaju tworzą układ ortogonalny w przedziale $(-1, 1)$ przy iloczynie skalarnym z wagą:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Mamy bowiem:

$$\langle T_n(x), T_m(x)\rangle = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ \pi\,, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}\,, & m = n \neq 0\,. \end{cases}$$

Wielomiany Laguerre'a

Ciąg wielomianów Laguerre'a definiujemy następująco:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\, e^x \Big(e^{-x} x^n\Big)^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Spełniają one również wzór rekurencyjny:

$$L_{n+1} = \frac{2n+1-x}{n+1} L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)\,.$$

Wielomiany Laguerre'a tworzą układ ortonormalny w przedziale $[0, +\infty)$ dla iloczynu skalarnego z wagą $w(x) = e^{-x}$. Iloczyn skalarny dwóch dowolnych wielomianów układu wynosi:

$$\langle L_n(x), L_m(x)\rangle = \int\limits_0^{+\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x}\, dx = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ 1\,, & m = n\,. \end{cases}$$

Wielomiany Hermite'a

Wielomiany Hermite'a definiujemy następująco:

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \Big(e^{-x^2}\Big)^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Prawdziwy jest dla nich wzór rekurencyjny:

$$H_{n+1} = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)\,.$$

Ciąg wielomianów Hermite'a jest ortogonalny w przedziale $(-\infty, +\infty)$ dla iloczynu skalarnego z wagą $w(x) = e^{-x^2}$, mamy bowiem:

$$\langle H_n(x), H_m(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\, dx = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\,, & m = n\,. \end{cases}$$