## 2. Historia

Na początku XIX wieku Fourier zadał fundamentalne pytanie: *Czy szereg Fouriera ciągłej funkcji jest zbieżny do niej punktowo?*

Wzmacniając nieco założenie ciągłości można bez większych trudności uzyskać odpowiedź twierdzącą. Tak jest na przyklad, gdy funkcja $f$ jest różniczkowalna w sposób ciągły. Dirichlet, który to udowodnił, był przekonany, że tak powinno być w przypadku wszystkich funkcji ciągłych. Nietrudno też pokazać, że dla funkcji całkowalnych z kwadratem zbieżność zachodzi w sensie normy przestrzeni tych funkcji.

Po Dirichlecie także Riemann, Weierstrass i Dedekind opowiedzieli się za hipotezą zbieżności szeregu Fouriera funkcji ciągłych. To przekonanie obalił Paul du Bois-Reymond, który w roku 1876 pokazał, że *istnieje funkcja ciągła, której szereg Fouriera jest rozbieżny w przynajmniej jednym punkcie.*

Łuzin postawił w 1915 roku hipotezę, że *szereg Fouriera funkcji $f \in L^2(\boldsymbol{T})$ jest zbieżny prawie wszędzie.* Kolmogorow podał w roku 1923 *przykład funkcji $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, której szereg Fouriera jest rozbieżny prawie wszędzie,* a w roku 1926 dokonał modyfikacji swojego przykładu, uzyskując szereg rozbieżny wszędzie. W tej sytuacji nie było jasne, czy poszukiwać pozytywnej, czy negatywnej odpowiedzi na hipotezę Łuzina.

Odpowiedzi udzielił Carleson roku 1966: *Tak, szereg Fouriera funkcji $f \in L^2(\boldsymbol{T})$ jest zbieżny prawie wszędzie do wartości funkcji.* W wywiadzie w roku 2007 Carleson ujawnił, że początkowo myślał, że ma metodę, która pozwoli mu wskazać przykład funkcji $f \in L^2(\boldsymbol{T})$, której szereg jest rozbieżny w przynajmniej jednym punkcie, ale ostatecznie zorientował się, że to się nie uda, co przekonało go do hipotezy Łuzina. Oryginalny dowód Carlesona jest bardzo trudny i chociaż kilku autorów (Mozzochi, Kahane, Joersbo & Mejbro, de Reyna, C. Fefferman, Lacey & Thiele) znalazło szereg uproszczeń, nadal nie ma łatwego dowodu.

W tym samym roku 1966 Katznelson pokazał, że dla każdego zbioru miary zero $E \subset \boldsymbol{T}$ istnieje funkcja ciągła, której szereg Fouriera jest rozbieżny przynajmniej w punktach tego zbioru. Stąd i z twierdzenia Carlesona można wywnioskować, że *zbiór $E \subset \boldsymbol{T}$ może być zbiorem rozbieżności szeregu Fouriera funkcji ciągłej, wtedy i tylko wtedy gdy jest miary zero.*

Carleson uważał, że rozszerzenie jego twierdzenia na funkcje $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ jest raczej oczywiste. Zrobił to Hunt w roku 1968. Zbieżność szeregu Fouriera funkcji $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ w normie tej przestrzeni jest sprawą znacznie łatwiejszą, ale z pewnością nie tak prostą, jak przypadek $p = 2$.

Zaczerpnięte z *http:en.wikipedia.orgwiki Carleson%27s_theorem*

A tu poniżej główne pytania tej teorii – omawiane na wykładzie:



gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx \tag{1.3}$$

Widzimy, że sumy częściowe szeregu trygonometrycznego są wielomianami trygonometrycznymi. Tak zbudowany szereg trygonometryczny nazywa się *szeregiem Fouriera* funkcji $f$. Aby to zaznaczyć, piszemy

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}, \qquad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.$$

Jak łatwo widać,

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant \|f\|_1, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

**1.4.** *Jeśli*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

*to szereg trygonometryczny*

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

*jest zbieżny jednostajnie. Ponadto, dla każdego* $n \in \boldsymbol{N}$

$$\widehat{S}(n) = c_n.$$

*Dowód.* Jednostajna zbieżność szeregu $S(x)$ wynika z kryterium Weierstrassa. Mamy bowiem

$$|c_n e^{inx}| \leqslant |c_n|.$$

Stąd też wzory na współczynniki otrzymujemy całkując jednostajnie zbieżny szereg $S(x)e^{-inx}$ wyraz po wyrazie. □

Pytania, jakie się nasuwają to:

1. Czy współczynniki Fouriera funkcji wyznaczają tę funkcję?
2. Czy szereg Fouriera funkcji $f \in L^p_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest zbieżny do funkcji $f$ w normie przestrzeni $L^p$ ?
3. Czy szereg Fouriera funkcji $f \in L^p_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest zbieżny do funkcji $f$ prawie wszędzie?
4. Czy jeśli $f$ jest ciągła, to jej szereg Fouriera jest zbieżny do niej w każdym punkcie? A może jednostajnie?
5. Może jeszcze inny rodzaj zbieżności jest naturalny dla funkcji z wymienionych klas?

Okaże się, że rozważając te pytania, trzeba będzie starannie rozróżnić przypadki $L^1$, $L^2$ oraz pozostałych $L^p$. Jeszcze inaczej trzeba będzie spojrzeć na zbieżność szeregów Fouriera funcji ciągłych. Odpowiedzi będą różne. Niektóre rozstrzygnięcia będą stosunkowo łatwe, inne będą zbyt głębokie, abyśmy je mogli rozważyć tutaj.