Rozdział 2. Metoda charakterystyk dla równań liniowych pierwszego rzędu

2019

AGH E-PODRĘCZNIKI

AGH

Spis treści

Metoda charakterystyk dla równań liniowych o stałych współczynnikach

W rozdziale tym omówimy rozwiązywanie równań liniowych różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach metodą charakterystyk.
Metoda ta polega na sprowadzeniu rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, tak zwanych równań charakterystyk.
W tym celu należy znaleść rozwiązania równania wyjściowego wzdłuż pewnych krzywych, a następnie pokazać, że powierzchnia utworzona w stosowny sposób z tak skonstruowanych krzywych (charakterystyk) jest rozwiązaniem równania wyjściowego.
Rozważmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$au_x + bu_y = c, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Niech u będzie rozwiązaniem równania (1) w obszarze D. Rozważmy krzywą Γ zawartą w D daną równaniami

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \quad t \in I.$$

Oczywiście wzdłuż krzywej Γ rozwiązanie u przyjmuje wartości

$$z(t) = u\big(x(t), \, y(t)\big), \quad t \in I,$$

a pochodna względem zmiennej t wyraża się wzorem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\,. \tag{2}$$

Załóżmy, że krzywa Γ jest tak dobrana, że

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b. \tag{3}$$

Stąd i z faktu, że u jest rozwiązaniem równania (1) wynika, że prawa strona relacji (2) jest równa c, czyli

$$\frac{dz}{dt} = c. \tag{4}$$

Rozwiązując równanie (3) z warunkami początkowymi: $x(0) = x_0, \;\; y(0) = y_0,$ otrzymamy

$$x = at + x_0, \quad y = bt + y_0,$$

lub po wyrugowaniu parametru t

$$y_0 = y - \frac{b}{a}(x - x_0). \tag{5}$$

Zauważmy, że przez każdy punkt obszaru D przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie układu równań (3).
Rozwiązanie równania (4) ma postać

$$z = ct + K. \tag{6}$$

Przypomnijmy, że funkcja (6) jest rozwiązaniem równania (1) wzdłuż krzywej Γ, czyli krzywej danej równaniem (5).
Jeśli zatem stałą K zastąpimy dowolną funkcją która na krzywej Γ przyjmuje stałą wartość, co symbolicznie możemy zapisać

$$K = F(y_0),$$

gdzie y_0 jest dane wzorem (5), funkcja

$$z = ct + F(y_0),$$

będzie w dalszym ciągu spełniać równanie (1) wzdłuż krzywej Γ.
Rozważmy teraz funkcje

$$u(x,y) = \frac{c}{a}(x - x_0) + F\big(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0\big),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.
Bezpośredni rachunek pokazuje, że funkcja ta jest rozwiązaniem równania (1).
Istotnie

$$au_x + bu_y = a\Big(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}F'\big(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0\big)\Big) + bF'\big(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0\big) = c.$$

Tak więc, aby znaleźć rozwiązania równania (1), wystarczy rozwiązać układ równań liniowych (3), (4).
Równania te noszą nazwę równań charakterystyk.
Warunki początkowe $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$ należy dobrać tak, aby krzywe całkowe Γ
pokryły cały obszar D. Zazwyczaj jako punkty początkowe wygodnie jest wziąść punkty leżące na stosownie dobranej krzywej, na przykład na osi Ox lub Oy.
Często wystarczy ograniczyć się do rozwiązań spełniających warunki: $x(0) = 0, \quad y(0) = y_0$.
Zauważmy jeszcze, że ponieważ F jest funkcją dowolną, wygodnie jest uzyskane rozwiązanie równania (1) zapisać w postaci równoważnej

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + F\big(y - \frac{b}{a}x\big). \tag{7}$$

PRZYKŁAD

Przykład 1:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + 2u_y = 0, \quad x > 0, \;\; y \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

spełniające warunek początkowy

$$u(0,y) = f(y), \tag{9}$$

gdzie f jest zadaną funkcją różniczkowalną.
Rozwiązując równania charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2,$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 0, \quad y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = t, \quad y = 2t + y_0,$$

lub po wyrugowaniu t,

$$y = 2x + y_0.$$

Równanie (4) przyjmuje postać

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

a jego rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$z = F(y_0),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.
Zgodnie z wzorem (7) całka ogólna równania (8) ma postać

$$u(x,y) = F(y - 2x).$$

Rozwiązanie to winno spełniać warunek początkowy (9), czyli

$$u(0,y) = F(y) = f(y).$$

Wynika stąd, że rozwiązaniem problemu (8), (9) jest funkcja

$$u(x,y) = f(y - 2x).$$

W szczególności, jeśli $f(y) = 1/(1 + y^3)$ to rozwiązaniem tego problemu jest funkcja

$$u(x,y) = \frac{1}{1 + (y - 2x)^3}.$$

PRZYKŁAD

Przykład 2:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + au_y = 0, \quad x > 0,\ y > 0\ \text{(a>0)}, \tag{10}$$

spełniające warunki

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,y) = g(y), \tag{11}$$

gdzie f i g są funkcjami różniczkowalnymi i ponadto $f(0) = g(0)$.
Zgodnie z poprzednimi rozważaniami całka ogólna równania (10) ma postać

$$u(x,y) = F(y - ax),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.
Rozważmy zbiory $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq ax\}$ oraz $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y > ax\}$.
Zauważmy, że w zbiorze D_1 rozwiązanie równania (10) winno spełniać warunek $u(x,0) = f(x)$, zaś w zbiorze D_2 warunek $u(0,y) = g(y)$. W pierwszym przypadku $F(-ax) = f(x)$, czyli $F(t) = f(-t/a)$, zaś w drugim $F(y) = g(y)$.
Wynika stąd, że rozwiązaniem problemu (10), (11) jest funkcja

$$u(x,y) = \begin{cases} f\big(x - \dfrac{y}{a}\big), & \text{jeśli} \quad x \geq 0,\ 0 \leq y \leq ax; \\ g(y - ax), & \text{jeśli} \quad x \geq 0,\ y > ax. \end{cases} \tag{12}$$

PRZYKŁAD

Przykład 3:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + 3u_y = 0, \quad x > 0,\ y > 0, \tag{13}$$

spełniające warunki

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \cos x, \quad \text{dla} \ \ x > 0, \\ u(0,y) &= 2y + 1, \quad \text{dla} \ \ y > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Nietrudno sprawdzić, że całka ogólna równania wyjściowego ma postać

$$u(x,y) = F(y - 3x),$$

zaś rozwiązanie spełniające zadane warunki początkowo-brzegowe ma postać

$$u(x,y) = \begin{cases} \cos(x - \dfrac{y}{3}), & \text{jeśli} \ \ x > 0,\ 0 < y < 3x, \\ 2(y - 3x) + 1, & \text{jeśli} \ \ x > 0,\ y \geq 3x. \end{cases}$$

Opisaną tu metodę możemy stosować również w przypadku, gdy współczynniki a, b, c są funkcjami zmiennych x i y.

PRZYKŁAD

Przykład 4:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + yu_y = \lambda u, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

spełniające warunek początkowy

$$u(0, y) = f(y),$$

gdzie f jest funkcją różniczkowalną.
Rozwiązując równania charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = y,$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 0, \quad y(0) = y_0$ otrzymamy

$$x = t, \quad y = y_0 e^t.$$

Zauważmy, że rodzina krzywych $x = t, \quad y = y_0 e^t, \quad y_0 \in \mathbb{R},$ pokrywa całą przestrzeń $\mathbb{R}^2,$ na której szukamy rozwiązania.
Równanie (4) przyjmuje tym razem postać

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy

$$z = Ke^{\lambda t}.$$

Ponieważ stała K jest dobrana dla charakterystyki $y_0 = ye^{-x}$ w miejsce K możemy wstawić $F(y_0),$ czyli

$$z = F(y_0)e^{\lambda t},$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną.
Zgodnie z poprzednimi razważaniami funkcja

$$u(x, y) = F\left(ye^{-x}\right)e^{\lambda x}$$

jest rozwiązaniem równania wyjściowego.
Uwzględniając warunek początkowy mamy

$$u(0, y) = F(y) = f(y).$$

Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x, y) = f\left(ye^{-x}\right)e^{\lambda x}.$$

.

PRZYKŁAD

Przykład 5:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + u^2 u_y = 0, \quad x,\, y \in \mathbb{R}_+$$

spełniające warunki

$$\begin{aligned} u(0,y) = \sqrt{y}, \qquad &\text{dla} \;\; y > 0, \\ u(x,0) = 0, \qquad &\text{dla} \;\; x > 0. \end{aligned}$$

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = z^2, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Z równania $\frac{dz}{dt} = 0$ wynika, że funkcja $z = u(x(t),\, y(t))$ jest stała wzdłuż charakterystyk.
Wykorzystując ten fakt, możemy w drugim równaniu potraktować z jako stałą.
Po rozwiązaniu równań charakterystyk z warunkami początkowymi $x(0) = 0, \quad y(0) = y_0,$ otrzymamy

$$x = t, \quad y = z^2 t + y_0, \quad z = F(y_0).$$

Eliminując z dwóch pierwszych równań t otrzymamy

$$y_0 = y - z^2 x,$$

a wstawiając - podobnie jak poprzednio w równości $z = F(y_0)$ w miejsce z funkcje $u,$ a w miejsce y_0 wyznaczoną powyżej zależność, otrzymamy rozwiązanie równania wyjściowego w postaci uwikłanej

$$u = F(y - xu^2).$$

Wykorzystując warunek początkowy otrzymamy

$$u(0,y) = F(y) = \sqrt{y}.$$

Zatem rozwiązanie naszego problemu możemy zapisać w postaci uwikłanej

$$u = \sqrt{y - xu^2} \quad \text{dla} \;\; y - xu^2 \geq 0.$$

Wyznaczając z ostatniego równania u mamy

$$u = \sqrt{\frac{y}{1+x}}, \quad \text{dla} \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0.$$

Zauważmy, że tak otrzymana funkcja u spełna również drugi z żądanych warunków, bowiem $u(x,0) = \sqrt{0} = 0.$

PRZYKŁAD

Przykład 6:

Rozważmy teraz liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$au_x + bu_y + cu_z = \alpha, \quad (x,\, y,\, z) \in V \subset \mathbb{R}^3.$$

Jak poprzednio szukamy rozwiązania wzdłuż krzywej $\Gamma \subset V$ danej równaniami

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad t \in I.$$

Załóżmy, że krzywa Γ jest tak dobrana, że

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c.$$

Rozwiązując ostatni układ równań z warunkami początkowymi: $x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0$ otrzymamy

$$x = at, \quad y = bt + y_0, \quad z = ct + z_0,$$

lub po wyrugowaniu parametru t równanie krawędziowe krzywej Γ :

$$y - \frac{b}{a}x = y_0, \quad z - \frac{c}{a}x = z_0.$$

(Jeśli uzyskana rodzina krzywych nie pokrywa obszaru $V,$ należy wzbogacić warunki początkowe).
Zauważmy, że wzdłuż krzywej Γ rozwiązanie równania przyjmuje wartość $v(t) = u\big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big),$ przy czym zgodnie z równaniem wyjściowym

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.$$

Stąd

$$v = \alpha t + K.$$

Ponieważ stała K jest dobrana do krzywej $\Gamma,$ możemy fakt ten wyrazić formułą $K = F(y_0, z_0),$ gdzie F jest dowolną różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych, czyli

$$v = \alpha t + F(y_0,\, z_0).$$

Wracając do zmiennych wyjściowych i pamiętając, że $t = x/a$ mamy

$$u(x, y, z) = \frac{\alpha}{a}x + F\big(y - \frac{b}{a}x, z - \frac{c}{a}x\big).$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja jest rozwiązaniem równania wyjściowego.

Metoda charakterystyk dla równań liniowych pierwszego rzędu

Moduł ten poświęcony jest rozwiązywaniu równań cząstkowych liniowych rzędu pierwszego kiedy współczynniki są funkcjami, a szukana funkcja zależy od dwóch zmiennych.
Rozważmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{15}$$

gdzie $a, \quad b, \quad c, \quad f$ są funkcjami ciągłymi w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Załóżmy ponadto, że funkcje a i b nie zerują się równocześnie w żadnym punkcie zbioru D.
Celem znalezienia rozwiązań równania (15) dokonajmy zmiany zmiennych

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \qquad (x, y) \in D \tag{16}$$

tak dobranej, aby po zmianie zmiennych w równaniu (15) wyrugować jedną z pochodnych cząstkowych.
Załóżmy chwilowo, że taka zmiana zmiennych istnieje i ponadto, że z równań (16) możemy lokalnie wyznaczyć x i y jako funkcje zmiennych ξ i η, czyli

$$x = x(\xi,\, \eta), \qquad y = y(\xi,\, \eta), \tag{17}$$

przy czym tak określone funkcje x i y posiadają pochodne cząstkowe względem ξ i η.
Połóżmy

$$w(\xi, \eta) = u\big(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\big).$$

Wracając do zmiennych wyjściowych x i y otrzymamy

$$u(x, y) = w\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big).$$

Stąd

$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x, \quad u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y.$$

Podstawiając ostatnie związki do równania (15) otrzymamy

$$(a\xi_x + b\xi_y)w_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)w_\eta + cw = f.$$

Zauważmy, że postawiony cel osiągniemy, jeśli funkcje η dobierzemy tak, aby

$$a\eta_x + b\eta_y = 0, \tag{18}$$

lub funkcje ξ tak aby

$$a\xi_x + b\xi_y = 0.$$

Niech η będzie rozwiązaniem równanie (18).
Połóżmy

$$\eta(x,\, y) = K,$$

gdzie K jest dowolną stałą.
Oczywiście $d\eta = 0,$ czyli

$$\eta_x dx + \eta_y dy = 0. \tag{19}$$

Jeśli $\eta_y \neq 0,$ z warunków (18), (19) wynika, że

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}. \tag{20}$$

Równanie (20) nazywamy **równaniem charakterystyk** równania (15). Rodzinę krzywych $\psi(x, y) = K,$ będącą rozwiązaniem ogólnym równania (20) nazywamy **rodziną charakterystyk** równania (15).
Niech $\psi(x, y) = K$ będzie rozwiązaniem ogólnym równania (20).
Kładąc

$$\xi = x, \quad \eta = \psi(x, y),$$

równanie (15) sprowadzimy do równania

$$\tilde{a}(\xi, \eta)w_\xi + \tilde{c}(\xi, \eta)w = \tilde{f}(\xi, \eta) \tag{21}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\xi, \eta) &= a\big(x(\xi, \eta),\, y(\xi, \eta)\big) = a\big(\xi,\, y(\xi, \eta)\big),\\
\tilde{c}(\xi, \eta) &= c\big(x(\xi, \eta),\, y(\xi, \eta)\big) = c\big(\xi,\, y(\xi, \eta)\big),\\
\tilde{f}(\xi, \eta) &= f\big(x(\xi, \eta),\, y(\xi, \eta)\big) = f\big(\xi,\, y(\xi, \eta)\big).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że zależność (21) możemy traktować jako równanie różniczkowe zwyczajne względem zmiennej $\xi,$ zależne od parametru $\eta.$ Niech $w = w(\xi, \eta)$ będzie rozwiązaniem tego równania. Połóżmy

$$u(x,y)=w\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big),\quad (x,y)\in D.$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja u jest rozwiązaniem równania (15).
Zauważmy jeszcze, że równania charakterystyk (20) możemy zapisać w postaci układu równań

$$\frac{dx}{dt}=a,\quad \frac{dy}{dt}=b. \tag{22}$$

PRZYKŁAD

Przykład 7:

Rozwiązać równanie

$$u_x+2xyu_y=u,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{23}$$

z warunkiem początkowym

$$u(0,y)=y^3,\quad y\in\mathbb{R}. \tag{24}$$

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx}=2xy,$$

otrzymamy

$$y=Ce^{x^2}\quad \text{lub}\quad ye^{-x^2}=C.$$

Kładąc

$$\xi=x,\quad \eta=ye^{-x^2},$$

mamy

$$u_x=w_\xi-2xye^{-x^2}w_\eta,\quad u_y=e^{-x^2}w_\eta,$$

a po podstawieniu do równia wyjściowego

$$w_\xi=w.$$

Rozwiązując ostatnie równanie dostajemy

$$w=Ke^{\xi}.$$

Ponieważ stała K może zależeć od η, przyjmijmy $K=F(\eta)$, gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.
Zatem

$$w=F(\eta)e^{\xi}.$$

Zgodnie z poprzednimi uwagami funkcja

$$u(x,y)=F\big(ye^{-x^2}\big)e^{x}$$

jest rozwiązaniem równania (23).
Uwzględniając warunek początkowy (24) mamy

$$u(0,y)=F(y)=y^3.$$

Zatem rozwiązaniem problemu (23), (24) jest funkcja

$$u(x,y)=y^3e^{-3x^2}e^{x}=y^3e^{x-3x^2}.$$

PRZYKŁAD

Przykład 8:

Rozwiązać równanie

$$xu_x + 2x^2u_y - u = x^2e^x. \tag{25}$$

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

otrzymamy $y = x^2 + C$.
Zmiana zmiennych

$$\xi = x, \quad \eta = y - x^2$$

prowadzi do równania

$$w_\xi - \frac{1}{\xi}w = \xi e^\xi.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy

$$w = \xi e^\xi + \xi F(\eta),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Wracając do zmiennych wyjściowych znajdziemy całkę ogólną równania (25):

$$u(x,y) = xe^x + xF(y - x^2).$$

Załóżmy teraz, że szukamy rozwiązania równania (25), które na krzywej $y = x^2$ przyjmuje wartość $\sin x$, czyli

$$u(x,x^2) = xe^x + xF(0) = \sin x.$$

Oznacza to, że musimy znaleźć taką stałą C aby

$$xe^x + xC = \sin x.$$

Ponieważ jest to niemożliwe, postawiony problem nie posiada rozwiązania.
Załóżmy z kolei, że szukamy rozwiązania równania (25), które na krzywej $y = x^2$ przyjmuje wartość $xe^x - 4x$, czyli

$$u(x,x^2) = xe^x + xF(0) = xe^x - 4x.$$

Wynika stąd, że $F(0) = -4$. Założony warunek jest więc spełniony, jeśli F jest dowolną funkcją różniczkowalną taką, że $F(0) = -4$. Oznacza to, że problem ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań.
Załóżmy wreście, że szukamy rozwiązania równania (25), które na krzywej $y = x^2 + x$ przyjmuje wartość $\cos x$, czyli

$$u(x,x^2 + x) = xe^x + xF(x) = \cos x.$$

Zauważmy, że warunek ten zachodzi, jeśli $F(x) = \frac{1}{x}\cos x - e^x$.
Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x,y) = xe^x + \frac{x}{y-x^2}\cos(y - x^2) - xe^{y-x^2}.$$

Warto odnotować, że krzywa $y = x^2$ jest charakterystyką, natomiast krzywa $y = x^2 + x$ nie jest charakterystyką równania (25).
Z tym faktem - jak zobaczymy później związana jest kwestia jednoznaczności lub niejednoznaczności rozwiązań problemu początkowego.

Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych

Rozważmy najpierw liniowe jednorodne równanie różniczkowe cząstkowe 1 -go rzędu o n -zmiennych niezależnych

$$a_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+a_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{26}$$

gdzie $a_1,\dots,a_n$ są funkcjami klasy C^1 określonymi w zbiorze $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.
Rozważmy ponadto układ równań

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_1(x_1,\,\dots,\,x_n),\\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_n(x_1,\,\dots,\,x_n),\end{cases} \tag{27}$$

zwany **układem równań charakterystyk** dla równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(1).

DEFINICJA

Definicja 1:

Funkcje $u=u(x_1,\dots,x_n)$ klasy C^1 w zbiorze Ω nazywamy całką pierwszą układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2) jeżeli dla dowolnego rozwiązania

$$x_1=x_1(t),\ \dots,\ \ x_n=x_n(t),\quad t\in I,$$

układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2) mamy

$$u\big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big)=\text{const}\qquad \text{dla}\quad t\in I,$$

tzn. funkcja u jest stała wzdłuż dowolnego rozwiązania układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2).

Bezpośrednim rachunkiem nietrudno sprawdzić iż zachodzi następująca uwaga:

UWAGA

Uwaga 1:

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1, a u całką pierwszą układu Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2).

Wówczas funkcja $v=f\big(u(x_1,\dots,x_n)\big)$ jest również całą pierwszą układu (2).

Podobnie, jeśli funkcje $u_1,\dots,u_k$ są całkami pierwszymi ułądu (2) a $F:\ R^k\to\mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, to funkcja $v=F\big(u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_k(x_1,\dots,x_n)\big)$ jest również całką pierwszą układu Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2)

TWIERDZENIE

Twierdzenie 1:

ZAŁOŻENIA:

Funkcja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1.

TEZA:

Funkcja u jest rozwiązaniem równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(1) wtedy i tylko wtedy gdy jest całką pierwszą układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2).

DOWÓD:

Warunek wystarczający. Niech u będzie całką pierwszą układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2). Niech $\overset{o}{x}= (\overset{o}{x}_1, \ldots, \overset{o}{x}_n) \in \Omega$.
Niech $x(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big),$ gdzie $t \in I,$ będzie rozwiązaniem układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2) przechodzącym w chwili t_0 przez punkt $\overset{o}{x},$ tzn. $x(t_0) = \overset{o}{x}.$
Ponieważ u jest całką pierwszą układu Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2) więc

$$u\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = \mathrm{const} \qquad \text{dla} \quad t \in I.$$

Różniczkując ostatnią równość względem zmiennej t dostajemy

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)\, x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)\, x_n'(t) = 0, \quad t \in I.$$

W szczególności dla $t = t_0$ mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overset{o}{x})\, a_1(\overset{o}{x}) \ + \ \ldots \ + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\overset{o}{x})\, a_n(\overset{o}{x}) \ = 0,$$

co oznacza, że funcja u spełnia równanie Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(1) w punkcie $\overset{o}{x}.$
Ponieważ $\overset{o}{x}$ jest dowolnym punktem zbioru $\Omega,$ więc funkcja u jest rozwiązaniem równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(1) w $\Omega.$

Warunek konieczny. Niech $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ będzie rozwiązaniem równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(1), a układ funkcji $x_1 = x_1(t), \ \ldots, \ x_n = x_n(t), \quad t \in I,$ rozwiązaniem układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2).
Oczywiście

$$\textstyle\sum_{i=1}^n a_i\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in I.$$

Ponieważ

$$x_i'(t) = a_i\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \qquad i = 1, \ldots, n,$$

powyższe równanie możemy zapisać w postaci

$$\textstyle\sum_{i=1}^n x_i'(t) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = 0,$$

czyli

$$\frac{d}{dt} u(\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = 0.$$

W konsekwencji

$$u\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = \mathrm{const} \qquad \text{dla} \quad t \in I,$$

co oznacza, że u jest całką pierwszą układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2).

DEFINICJA

Definicja 2:

Funkcje $u_1, \dots, u_m \in C^1(\Omega)$ $m \le n,$ nazywamy **funkcyjnie niezależnymi** w zbiorze Ω

jeśli dla dowolnego $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

wynosi m.
W szczególności, jeśli $m = n$ oznacza to, że wyznacznik z powyższej macierzy jest różny od zera.

Zauważmy, że jeśli $u_1, \dots, u_m$ są funkcyjnie niezależne w zbiorze Ω to dla dowolnego $x \in \Omega$ równość

$$\lambda_1 u_1(x) + \dots + \lambda_m u_m(x) = 0$$

zachodzi tylko wówczas, gdy $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.
Przypomnijmy, że punkt $\overset{o}{x} \in \Omega$ nazywamy punktem **równowagi** (lub **stacjonarnym**) układu Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2), jeśli prawe strony tego układu zerują się w tym punkcie, czyli

$$a_1(\overset{o}{x}) = a_2(\overset{o}{x}) = \dots = a_n(\overset{o}{x}) = 0.$$

TWIERDZENIE

Twierdzenie 2:

ZAŁOŻENIA:

Niech $\overset{o}{x} = (\overset{o}{x}_1, \dots, \overset{o}{x}_n) \in \Omega$ będzie dowolnym punktem rówwagi układu Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2).

TEZA:

Wtedy istnieje $n-1$ funkcyjnie niezależnych całek pierwszych $u_1, \dots, u_{n-1}$ tego układu. Ponadto, jeśli u jest całką pierwszą układu Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2) w tym otoczeniu, to

$$u(x_1, \dots, x_n) = F\big(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big), \tag{28}$$

gdzie F jest funkcją klasy C^1.

Dowód tego twierdzenia został przedstawiony w module "Całki pierwsze" (patrz twierdzenie 1).

PODSUMOWANIE

Podsumowanie 1:

Z twierdzenia 2 wynika, że dowolne rozwiązanie równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(1) ma postać Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(3). Aby zatem znaleźć całkę ogólną równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(1) wystarczy znaleźć $n-1$ funkcyjnie niezależnych całek pierwszych układu równań charakterystyk Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2).

UWAGA

Uwaga 2:

Zauważmy, że układ równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(2) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n}, \tag{29}$$

a ponadto dla dowolnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)}{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n} = \frac{d(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n)}{\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_n a_n}$$

PRZYKŁAD

Przykład 9:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$xu_x + yu_y + z^2 u_z = 0.$$

Układ równań charakterystyk możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2}.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2},$$

otrzymujemy:

$$\tfrac{y}{x} = C_1, \qquad xe^{\frac{1}{z}} = C_2.$$

łatwo sprawdzić, że funkcje:

$$\psi_1 = \tfrac{y}{x}, \qquad \psi_2 = xe^{\frac{1}{z}}.$$

są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk, a zatem szukana całka ogólna ma postać

$$u = F\left(\tfrac{y}{x}, xe^{\frac{1}{z}}\right),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowlną dwóch zmiennych.

Rozważmy teraz równanie niejednorodne

$$a_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+a_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(x_1,\ldots,x_n,u), \tag{30}$$

gdzie $a_1,\ldots,a_n$ są funkcjami klasy C^1 określonymi w zbiorze $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.
Szukamy rozwiązania w postaci uwikłanej

$$V(x_1,\ldots,x_n,u)=0, \tag{31}$$

gdzie V jest funkcją posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu $\overset{o}{w}=(\overset{o}{x}_1,\ldots,\overset{o}{x}_n,\overset{o}{u})$.
Załóżmy, że $\dfrac{\partial V}{\partial u}(\overset{o}{w})\neq 0$. Z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej w otoczeniu punktu $\overset{o}{w}$ otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial V}{\partial u},\qquad i=1,\ldots,n$$

Podstawiając ostatnie wielkości do równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(5) otrzymamy równanie liniowe jednorodne

$$a_1(x_1,\ldots,x_n,u)V_{x_1}+\cdots+a_n(x_1,\ldots,x_n,u)V_{x_n}+f(x_1,\ldots,x_n,u)V_u=0, \tag{32}$$

Równania charakterystyk równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(7) mają postać:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\ \ldots,x_n,u)}=\ \ldots\ =\frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n,u)}=\frac{du}{f(x_1,\ldots,x_n,u)}. \tag{33}$$

Niech $\psi_1,\ldots,\psi_n$ będą funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu równań Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(8). Zgodnie z wzorem Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(3) całka ogólna równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(7) ma postać

$$V=F(\psi_1,\ldots,\psi_n),$$

gdzie F jest dowolną funkcją posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe.
Stąd i Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(6) wynika, że całką ogólną równania Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(5) ma postać

$$F(\psi_1,\ldots,\psi_n)=0. \tag{34}$$

PRZYKŁAD

Przykład 10:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$u_x + yu_y + z^2 u_z = u^3.$$

Równanie charakterystyk możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2} = \frac{du}{u^3}.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1}, \qquad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{1}, \qquad \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{1},$$

otrzymamy:

$$\ln y - x = C_1, \qquad \frac{1}{z} + x = C_2, \qquad \frac{1}{u^2} + 2x = C_3$$

łatwo sprawdzić, że funkcje:

$$\psi_1 = \ln y - x, \quad \psi_2 = \frac{1}{z} + x, \quad \psi_3 = \frac{1}{u^2} + 2x,$$

są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk.
Zatem szukana całka ogólna ma postać:

$$F\big(\ln y - x,\ \tfrac{1}{z} + x,\ \tfrac{1}{u^2} + 2x\big) = 0,$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną trzech zmiennych.

Metoda charakterystyk dla prawie-liniowego równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu

Rozważmy prawie-liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \quad (x,y) \in D, \tag{35}$$

gdzie $a,$, $b,$ c są funkcjami klasy C^1 w zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Niech $D = \{(x,y) : (x,y,z) \in \Omega \text{ dla pewnego } z \in \mathbb{R}\}$.
Zakładamy ponadto, że funkcje $a,$ b nie zerują się równocześnie w żadnym punkcie obszaru Ω.
Przypomnijmy, że rozwiązaniem równania (35) w zbiorze D nazywamy funkcje $u \in C^1(D),$ spełniającą dla każdego $(x,y) \in D$ równanie (35).
Rodzinę wszystkich rozwiązań równania (35) nazywamy **całką ogólną tego równania**.
Jeśli funkcja u jest rozwiązaniem równania (35) w zbiorze $D,$ to powierzchnia S dana wzorem $z = u(x,y), \quad (x,y) \in D$ nazywa się **powierzchnią całkową** lub **wykresem rozwiązania** równania (35).
Zauważmy, że dla dowolnego punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ wektor

$$\vec{n}(x_0,y_0) = \big(u_x(x_0,y_0),\ u_y(x_0,y_0),\ -1\big)$$

jest prostopadły do powierzchni S w punkcie P_0.

Ponieważ u jest rozwiązaniem równania (35), zatem

$$a(P_0)u_x(x_0,y_0) + b(P_0)u_y(x_0,y_0) - c(P_0) = 0, \tag{36}$$

co oznacza, że wektor $\big(a(P_0),\ b(P_0),\ c(P_0)\big)$ jest prostopadły do wektora $\vec{n}(x_0,y_0),$ a zatem jest styczny do wykresu rozwiązania u w punkcie P_0.

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = c(x,y,z). \end{cases} \tag{37}$$

Krzywe, które są rozwiązaniami układu (37), nazywami charakterystykami równania (35), a same równania (37), równaniami charakterystyk.
Pokażemy, że jeśli dane jest rozwiązanie u równania (35) określone w zbiorze $D,$ to przez dowolny punkt powierzchni całkowej S danej wzorem $z = u(x,y),\ \ (x,y) \in D,$ przechodzi dokładnie jedna charakterystyka.

Na odwrót, mając daną rodzinę charakterystyk, możemy za ich pomocą skonstruować rozwiązanie równania.

UWAGA

Uwaga 3:

Załóżmy, że przez dowolny punkt powierzchni S klasy C^1 danej równaniem $z = u(x,y),\ \ (x,y) \in D,$ przechodzi rozwiązanie układu równań (37) całkowicie leżące na $S.$ Wówczas funkcja u jest rozwiązaniem równania (35) w zbiorze $D.$

Istotnie, zgodnie z przyjętym założeniem, przez dowolny punkt $P = (x,y,u(x,y))$ powierzchni $S,$ przechodzi rozwiązanie układu równań (37) leżące na $S.$ Oczywiście wektor $\vec{w}(P),$ styczny do tego rozwiązania w punkcie $P,$ leży na płaszczyźnie stycznej do powierzchni S w punkcie $P,$ a zatem jest prostopadły do wektora

$$\vec{n}(x,y) = (u_x(x,y),\ u_y(x,y),\ -1).$$

Zgodnie z równaniami (37)

$$\vec{w}(P) = \Big(a\big(x,y,u(x,y)\big), b\big(x,y,u(x,y)\big), c\big(x,y,u(x,y)\big)\Big).$$

Oczywiście iloczyn skalarny wektorów $\vec{n}(x,y)$ i $\vec{w}(P)$ jest równy zeru, czyli

$$a\big(x,y,u(x,y)\big)u_x(x,y) + b\big(x,y,u(x,y)\big)u_y(x,y) - c\big(x,y,u(x,y)\big) = 0.$$

Ponieważ ostatnia równość zachodzi dla dowolnego $(x,y) \in D,$ oznacza to, że u jest rozwiązaniem równania (35) w zbiorze $D.$

UWAGA

Uwaga 4:

Załóżmy, że funkcja $z=u(x,y),\ (x,y)\in D,$ jest rozwiązaniem równania (35). Niech S będzie powierzchnią całkową odpowiadającą temu rozwiązaniu. Niech γ będzie charakterystyką równania (35) przechodzącą przez punkt $(x_0,y_0,z_0)\in S.$ Wówczas krzywa γ leży całkowicie na powierzchni $S.$

Istotnie, niech $\gamma(t)=\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big),\ t\in I,$ będzie rozwiązaniem układu równań zwyczajnych (37) z warunkami początkowymi $x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0,\ z(t_0)=z_0$. Rozważmy funkcje $U:\ I\to\mathbb{R}$ daną wzorem

$$U(t)=z(t)-u\big(x(t),y(t)\big).$$

Oczywiście $U(t_0)=0,$ bowiem $z_0=u(x_0,y_0).$ Różniczkując funkcje U względem t i uwzględniając fakt, że γ jest rozwiązaniem układu (37) otrzymamy

$$\begin{aligned}U'(t)=&z'(t)-u_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)-u_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)=c\big(x(t),y(t),z(t)\big)-\\&u_x\big(x(t),y(t)\big)a\big(x(t),y(t),z(t)\big)-u_y\big(x(t),y(t)\big)b\big(x(t),y(t),z(t)\big).\end{aligned}\tag{38}$$

Ponieważ $z(t)=U(t)+u\big(x(t),y(t)\big),$ więc z (38) mamy

$$\begin{aligned}U'(t)=&c\Big(x(t),y(t),U(t)+u\big(x(t),y(t)\big)\Big)-\\&u_x\big(x(t),y(t)\big)a\Big(x(t),y(t),U(t)+u\big(x(t),y(t)\big)\Big)-\\&u_y\big(x(t),y(t)\big)b\Big(x(t),y(t),U(t)+u\big(x(t),y(t)\big)\Big).\end{aligned}\tag{39}$$

Jest to względem U równanie różniczkowe zwyczajne.
Ponieważ prawa strona tego równania jest klasy C^1 (względem zmiennej t) - zgodnie z teorią równań różniczkowych zwyczajnych - dla zadanego warunku początkowego istnieje dokładnie jedno rozwiązanie.
Stąd i z faktu, że u jest rozwiązaniem równania (35) wynika, że funkcja $U=0$ jest jedynym rozwiązaniem równania (39) spełniającym warunek początkowy $U(t_0)=0.$
Zatem $U(t)=z(t)-u(x(t),y(t))=0$ dla $t\in I,$ co oznacza, że wykres krzywej γ leży całkowicie na powierzchni S i kończy to dowód uwagi 4.

UWAGA

Uwaga 5:

Mając daną krzywą $\gamma:\ I\to\mathbb{R}^3$ zadaną równaniami

$$\gamma(s)=\big(\gamma_1(s),\gamma_2(s),\gamma_3(s)\big),\tag{40}$$

będziemy szukać takiego rozwiązania u równania (35), aby jego wykres zawierał krzywą $\gamma,$ to znaczy, aby zachodził warunek

$$\gamma_3(s)=u\big(\gamma_1(s),\gamma_2(s)\big)\quad \text{dla}\quad s\in I.\tag{41}$$

Ponadto okreslimy dla jakich krzywych γ problem (35), (41) będzie miał dokładnie jedno rozwiązanie, a kiedy nieskończenie wiele rozwiązań.

TWIERDZENIE

Twierdzenie 3:

ZAŁOŻENIA:

Niech $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ będzie funkcją klasy C^1 i niech $s_0 \in I$. Załóżmy, że współczynniki a, b, c równania (35) są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(\gamma_1(s_0), \gamma_2(s_0), \gamma_3(s_0)\big)$ i ponadto

$$\begin{vmatrix} \gamma_1'(s_0) & \gamma_2'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{42}$$

TEZA:

Równanie (35) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu D punktu (x_0, y_0), które spełnia warunek (41)

w pewnym stosownie dobranym otoczeniu punktu s_0.

DOWÓD:

Ponieważ funkcje a, b, c są klasy C^1 w otoczeniu punktu P_0, więc istnieje otoczenie $J = (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \subset I$ punktu s_0 takie, że dla dowolnego $\in J$ układ (37) z warunkami początkowymi

$$x(0) = \gamma_1(s), \quad y(0) = \gamma_2(s), \quad z(0) = \gamma_3(s)$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Oznacza to, że przez każdy punkt $\gamma(s)$, dla $s \in I$, przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie układu (37), które możemy zapisać w postaci:

$$x(t) = X(s,t), \quad y(t) = Y(s,t), \quad z(t) = Z(s,t). \tag{43}$$

Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i przyjętych założeń wynika, że funkcje X, Y, Z w pewnym otoczeniu Δ punktu $(s_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe względem obu zmiennych. Zauważmy jeszcze, że w otoczeniu tym funkcje X, Y, Z spełniają równania:

$$X_t = a(X,Y,Z), \quad Y_t = b(X,Y,Z), \quad Z_t = c(X,Y,Z). \tag{44}$$

oraz warunki początkowe:

$$X(s,0) = \gamma_1(s), \quad Y(s,0) = \gamma_2(s), \quad Z(s,0) = \gamma_3(s). \tag{45}$$

(W szczególności $X(s_0, 0) = x_0$, $Y(s_0, 0) = y_0$, $Z(s_0, 0) = z_0$).
Na mocy powyższych obserwacji, zależności (45) i (44) oraz wyboru punktu (x_0, y_0, z_0) mamy

$$X_s(s_0, 0) = \gamma_1'(s_0), \quad Y_s(s_0, 0) = \gamma_2'(s_0)$$

oraz

$$X_t(s_0, 0) = a(x_0, y_0, z_0), \quad Y_t(s_0, 0) = b(x_0, y_0, z_0).$$

Wykorzystując ostatnie równości, warunek (42) możemy zapisać w postaci

$$\begin{vmatrix} X_s(s_0, 0) & Y_s(s_0, 0) \\ X_t(s_0, 0) & Y_t(s_0, 0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{46}$$

która mówi, że dla odwzorowania $\Delta \ni (s,t) \to (X(s,t), Y(s,t))$ spełnione są założenia twierdzenia o funkcji odwrotnej. Istnieją zatem otoczenie V punktu (x_0, y_0) oraz funkcje $S, T : V \to \mathbb{R}$ klasy C^1 takie, że

$$x = X\big(S(x,y), T(x,y)\big), \quad y = Y\big(S(x,y), T(x,y)\big) \tag{47}$$

oraz

$$s = S\big(X(s,t), Y(s,t)\big), \quad t = T\big(X(s,t), Y(s,t)\big). \tag{48}$$

W szczególności

$$S(x_0, y_0) = s_0, \quad T(x_0, y_0) = 0. \tag{49}$$

Bez utraty ogólności rozważań (dobierając stosownie zbiory Δ i V) można przyjąć, że odwzorowanie (X, Y) przekształca zbiór Δ na V, a odwzorowanie (S, T) zbiór V na Δ, przy czym - zgodnie z (49) - punktowi $(s_0, 0)$ odpowiada punkt (x_0, y_0).
Rozważmy funkcje $u : \Omega \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$u(x,y) = Z\big(S(x,y),\, T(x,y)\big), \tag{50}$$

gdzie Z jest funkcją określoną w zbiorze Δ wzorami (43).
Pokażemy, że tak określona funkcja u jest szukanym rozwiązaniem równania (35) w zbiorze V.
Różniczkując równość (50) względem zmiennych x i y otrzymamy

$$u_x = Z_s S_x + Z_t T_x, \qquad u_y = Z_s S_y + Z_t T_y. \tag{51}$$

Następnie różniczkując równości (47) względem zmiennych x i y otrzymamy

$$\begin{aligned} 1 &= X_s S_x + X_t T_x, \quad & 0 &= X_s S_y + X_t T_y, \\ 0 &= Y_s S_x + Y_t T_x, \quad & 1 &= Y_s S_y + Y_t T_y, \end{aligned}$$

skąd nietrudno wyliczyć, że

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{Y_s}{Y_s X_t - Y_t X_s}, \qquad & T_y &= \frac{X_s}{X_s Y_t - X_t Y_s}, \\ S_x &= \frac{Y_t}{X_s Y_t - X_t Y_s}, \qquad & S_y &= \frac{X_t}{X_t Y_s - X_s Y_t}. \end{aligned}$$

Wykorzystując związki (44), (50) i (51) oraz ostatnie równości otrzymamy

$$\begin{aligned} &a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y \;=\; X_t\big(Z_s S_x + Z_t T_x\big) + Y_t\big(Z_s S_y + Z_t T_y\big) = \\ &\backslash\mathrm{n} X_t\left(\frac{Z_s Y_t}{X_s Y_t - X_t Y_s} + \frac{Z_t Y_s}{Y_s X_t - Y_t X_s}\right) + \; Y_t\left(\frac{Z_s X_t}{X_t Y_s - X_s Y_t} + \frac{Z_t X_s}{X_s Y_t - X_t Y_s}\right) = \\ &\frac{Z_s\left(X_t Y_t - X_t Y_t\right)}{X_s Y_t - X_t Y_s} + \frac{Z_t\left(X_s Y_t - X_t Y_s\right)}{X_s Y_t - X_t Y_s} \;=\; Z_t \;=\; c(x,y,u), \end{aligned}$$

co oznacza, że funkcja u jest rozwiązaniem równania (35) w zbiorze V.
Korzystając następnie z (45), (50) i (48) otrzymamy

$$u\big(\gamma_1(s),\, \gamma_2(s)\big) = u\big(X(s,0),\, Y(s,0)\big) = Z\Big(S\big(X(s,0),\, Y(s,0)\big),\, T\big(X(s,0),\, Y(s,0)\big)\Big) = Z(s,0) = \gamma_3(s),$$

co oznacza. że rozwiązanie u spełnia warunek (41) w pewnym otoczeniu punktu s_0.
Pozostaje sprawdzić, że rozwiązanie to jest określone jednoznacznie.
Niech v będzie dowolnym rozwiązaniem równania (35) zawierającym krzywą γ. Na mocy uwagi 2 charakterystyka równania (35) przechodząca przez dowolny punkt krzywej γ leży całkowicie na powierzchni całkowej $z = v(x,y)$.
W szczególności wynika stąd, że powierzchnia

$$x = X(s,t), \quad y = Y(s,t), \quad z = Z(s,t), \qquad (s,t) \in \Delta,$$

czyli zgodnie z (50) powierzchnia $z = u(x,y) = Z\big(S(x,y), T(x,y)\big)$, leży całkowicie na powierzchni całkowej $z = v(x,y)$ co oznacza, że lokalnie rozwiązania u i v pokrywają się. Dowód twierdzenia 1 został zakończony.

Rozpatrzmy teraz przypadek

$$\begin{vmatrix} \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \\ a(P) & b(P) \end{vmatrix} = 0, \tag{52}$$

dla $s \in J, \quad P = \big(X(s,0), Y(s,0), Z(s,0)\big) = \big(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)\big)$.
Warunek (52) możemy zapisać w postaci

$$\gamma_1'(s) = \lambda a(P), \qquad \gamma_2'(s) = \lambda b(P). \tag{53}$$

Po zróżniczkowanie (41) względem s otrzymamy

$$\gamma_3'(s) = u_x\left(\gamma_1(s),\, \gamma_2(s)\right)\gamma_1'(s) + u_y\left(\gamma_1(s),\, \gamma_2(s)\right)\gamma_2'(s) \tag{54}$$

natomiast z (35) i (45) wynika natychmiast, że

$$c(P) = a(P)u_x\left(\gamma_1(s),\, \gamma_2(s)\right) + b(P)u_y\left(\gamma_1(s),\, \gamma_2(s)\right) \tag{55}$$

Z równości (53), (54) i (55) wynika, że $\gamma_3'(s) = \lambda c(P)$. Zatem wektory $\big(\gamma_1'(s),\, \gamma_2'(s), \gamma_3'(s)\big)$ oraz $\big(a(P),\, b(P),\, c(P)\big)$, $s \in J$, są równoległe, co oznacza, że γ jest charakterystyką równania (35). Zauważmy, że w tym przypadku problem (35), (41) posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Istotnie, niech $\tilde{\gamma}$ będzie krzywą przecinającą krzywą γ. Na mocy twierdzenia 3 istnieje (dokładnie jedno) rozwiązanie równania (35) zawierające krzywą $\tilde{\gamma}$. Z drugiej strony γ ma wspólny punkt z tym rozwiązaniem, zatem na mocy uwagi 4, również krzywa γ leży całkowicie na tym rozwiązaniu. Ponieważ takich krzywych $\tilde{\gamma}$ może być nieskończenie wiele, więc otrzymamy nieskończenie wiele rozwiązań zawierających krzywą γ.

Metoda charakterystyk - przykłady

Na poniższym przykładzie prześledzimy różne sposoby praktycznego wykorzystania metody charakterystyk, które umownie nazwiemy metodą krzywych charakterystycznych, metodą charakterystyk, metodą zmiany zmiennych oraz metodą całek pierwszych.
Znaleźć rozwiązanie równania

$$xu_x + yu_y = u, \tag{56}$$

przechodzące przez krzywą

$$x = s,\ \ y = s+1,\ \ z = 2, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

PRZYKŁAD

Przykład 11: Metoda krzywych charakterystycznych

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{du}{dt} = u,$$

otrzymamy

$$x = Ae^t, \quad y = Be^t, \quad u = Ce^t.$$

Załóżmy, że charakterystyka przechodzi przez punkt $(s, s+1, 2)$ dla $t = 0.$ Wynika stąd, że

$$A = s, \quad B = s+1, \quad C = 2.$$

Zatem równania charakterystyk przechodzących przez zadaną krzywą mają postać

$$x = se^t, \quad y = (s+1)e^t, \quad u = 2e^t.$$

Eliminując z tego układu s i $t,$ otrzymamy rozwiązanie problemu (56), (57)

$$u = 2(y-x).$$

PRZYKŁAD

Przykład 12: Metoda charakterystyk

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y,$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 1,\ y(0) = y_0,$ otrzymamy

$$x = e^t, \quad y = y_0 e^t,$$

a po wyrugowaniu t

$$\frac{y}{x} = y_0.$$

Rozwiązując pozostałe równanie charakterystyk

$$\frac{dz}{dt} = z,$$

otrzymamy

$$z = Ce^t,$$

gdzie stała C zależy od krzywej $\frac{y}{x} = y_0$. Fakt ten możemy zapisać w postaci

$$z = F(y_0)e^t,$$

gdzie F jest dowolną funkcją klasy C^1. Wracając do zmiennych x i y otrzymamy

$$u = F(\tfrac{y}{x})x.$$

Uwzględniając zadane warunki mamy

$$2 = F\big(1 + \tfrac{1}{s}\big)s.$$

Podstawiając $\tau = 1 + \frac{1}{s}$ otrzymamy

$$F(\tau) = 2(\tau - 1).$$

Zatem szukane rozwiązanie problemu (56), (57) ma postać

$$u = 2\big(\frac{y}{x} - 1\big)x = 2(y - x).$$

PRZYKŁAD

Przykład 13: Metoda zmiany zmiennych

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

otrzymamy $y = Cx.$ Zmiana zmiennych

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}$$

sprowadza równanie wyjściowe do postaci

$$\xi \frac{dw}{d\xi} = w.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy

$$w = \xi\, F(\eta),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Wracają do zmiennych wyjściowych otrzymamy całkę ogólną równania wyjściowego

$$u(x,y) = xF\big(\tfrac{y}{x}\big).$$

Uwzględniając warunek początkowy $u(s, s+1) = 2$ otrzymamy

$$2 = sF\big(\tfrac{s+1}{s}\big).$$

Kładąc $t = \dfrac{s+1}{s},$ czyli $s = \dfrac{1}{t-1},$ mamy

$$2 = \frac{1}{t-1} F(t).$$

Zatem $F(t) = 2(t-1).$ Stąd szukane rozwiązanie problemu (56), (57) ma postać

$$u(x,y) = 2\big(\frac{y}{x} - 1\big)x = 2(y-x).$$

PRZYKŁAD

Przykład 14: Metoda całek pierwszych

Rozwiązując równania

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u},$$

otrzymamy rodziny charakterystyk

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{u}{x} = C_2.$$

Ponieważ funkcje $\psi_1 = \frac{y}{x}, \quad \psi_2 = \frac{u}{x}$ są funkcyjnie niezależnmi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u},$$

zgodnie z wzorem Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych-(8) całka ogólna równania wyjściowego ma postać

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0,$$

gdzie F jest dowolną różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych. Zauważmy, że wzór na całkę ogólną możemy formalnie zapisać w postaci $F(C_1, C_2) = 0,$ gdzie $C_1 = \psi_1, \ C_2 = \psi_2.$ Aby znaleźć całkę szczególną przechodzącą przez zadaną krzywą należy wyznaczyć funkcje $F.$ W tym celu wystarczy wyznaczyć związek pomiędzy C_1 i $C_2.$ Możemy go uzyskać rugując $s, \ x, \ y$ oraz u z równań

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{u}{x} = C_2, \quad x = s, \quad y = s + 1, \quad u = 2.$$

Po przeprowadzeniu prostych rachunków otrzymamy

$$C_2 = 2(C_1 - 1).$$

Podstawiając w miejsce C_1 i C_2 stosowne funkcje mamy

$$\frac{u}{x} = 2\left(\frac{y}{x} - 1\right).$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie problemu (56), (57)

$$u = 2(y - x).$$

ZADANIE

Zadanie 1:

Treść zadania:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + uu_y = u^2,$$

które na krzywej $y = \ln x$ przyjmuje wartość $u = 1,$ tzn. $u(x, \ln x) = 1.$

Rozwiązanie:

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{du}{dt} = u^2, \quad \frac{dy}{dt} = u,$$

otrzymamy

$$x = t + A, \quad u = \frac{1}{C - t}, \quad y = -\ln|C - t| + B.$$

Przyjmując, że dla $t = 0$ charakterystyki przechodzą przez punkt $(s, \ln s, 1),$ możemy wyznaczyć stałe

$$A = s, \quad C = 1, \quad B = \ln s.$$

Zatem

$$x = t + s, \quad y = -\ln|1 - t| + \ln s, \quad u = \frac{1}{1 - t}.$$

Eliminując z tego układu t i s otrzymamy szukane rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$x + \frac{1}{u} - 1 = \frac{1}{|u|}e^y.$$

ZADANIE

Zadanie 2:

Treść zadania:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$(y+z)u_x + yu_y + (x-y)u_z = 0.$$

Rozwiązanie:

Równania charakterystyk mają postać:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{d(x+z)}{x+z} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{d(x-y)}{z} = \frac{dz}{x-y},$$

otrzymujemy

$$\frac{x+z}{y} = C_1, \qquad (x-y)^2 - z^2 = C_2.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje

$$\psi_1 = \frac{x+z}{y}, \quad \psi_2 = (x-y)^2 - z^2$$

są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk. Zatem - na mocy twierdzenia 1 i twierdzenia 2 - całka ogólna równania wyjściowego ma postać:

$$u = F\Big(\frac{x+z}{y}, \quad (x-y)^2 - z^2\Big),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną dwóch zmiennych.

ZADANIE

Zadanie 3:

Treść zadania:

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$yu_x - 4x^3 u_y = yu^2.$$

Rozwiązanie:

W celu znalezienia całek pierwszych układu równań charakterystyk

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-4x^3} = \frac{du}{yu^2}$$

rozwiążmy równania

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-4x^3}, \qquad \frac{dx}{y} = \frac{du}{yu^2}.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$2x^4 + y^2 = C_1, \qquad x + \frac{1}{u} = C_2.$$

Ponieważ funkcje $\psi_1 = 2x^4 + y^2,\ \ \psi_2 = x + \frac{1}{u}$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk, szukane rozwiązanie ogólne ma postać:

$$F\Big(2x^4 + y^2, x + \frac{1}{u}\Big) = 0.$$

ZADANIE

Zadanie 4:

Treść zadania:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$x^2 u_x + y^2 u_y = (x+y)u.$$

Rozwiązanie:

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{du}{(x+y)u}.$$

Rozważmy układ równań

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}, \qquad \frac{d(y-x)}{y^2-x^2} = \frac{du}{(x+y)u}.$$

Całka pierwszego równania ma postać $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C_1$. Zapisując natomiast drugie równanie w postaci równoważnej

$$\frac{d(y-x)}{y-x} = \frac{du}{u},$$

zauważymy łatwo, że jego całka ma postać $\frac{u}{y-x} = C_2$. W konsekwencji szukane rozwiązanie możemy wyrazić w formie

$$F\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{u}{y-x}\Big) = 0.$$

ZADANIE

Zadanie 5:

Treść zadania:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = 0.$$

Rozwiązanie:

Z układu równań chrakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \qquad \frac{dy}{dt} = z - x, \qquad \frac{dz}{dt} = x - y,$$

otrzymamy zależności

$$dx + dy + dz = 0, \qquad xdx + ydy + zdz = 0,$$

które implikują natychmiast rodziny całek pierwszych

$$x + y + z = C_1, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Szukana całka ogólna ma zatem postać

$$u = F\big(x + y + z,\, x^2 + y^2 + z^2\big).$$