Zadaniem jest sprowadzić do postaci kanonicznej równanie eliptyczne:

$$U_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} = 0.$$

Postępujemy wzorując się na algorytmie. Mamy A(x,y) = 1, B(x,y) = 1 (a nie 2 !!), C(x,y) = 5.

1. Obliczamy wyróżnik równania:

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y) = 4 - 20 = -16.$$

2. Określamy typ równania w zależności od wartości obliczonego wyróżnika. Otrzymaliśmy, że wyróżnik jest ujemny na całej płaszczyźnie, a więc trafiamy w przypadek c) $\Delta<0$. Oznacza to, że omawiane równanie jest typu eliptycznego na całej płaszczyźnie.

3. Tworzymy równanie charakterystyczne:

$$1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5 = 0.$$

Obliczamy delty równania charakterystycznego:

$$\delta = B^2 - 4AC = -16. \quad \sqrt{\Delta} = 4i.$$

Wyznaczamy pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i. \end{cases}$$

Otrzymujemy, że delta jest ujemna, więc mamy równanie eliptyczne. Musimy rozwiązać jedno równanie różniczkowe (drugie ma rozwiązanie sprzężone). Rozwiążmy go:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 1 - 2i.$$

Jest to jedno z najprostszych równań różniczkowych pierwszego rzędu- równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych. Rozdzielamy zmienne:

$$dy = (1 - 2i)dx.$$

Całkujemy równanie stronami:

$$\int dy = \int (1 - 2i)dx.$$

Otrzymujemy, że:

$$y = (1 - 2i)x + C_1.$$

Musimy teraz wyrugować stałą C_1:

$$C_1 = y + 2ix - x.$$

Teraz w analogiczny sposób moglibyśmy rozwiązać drugie równanie:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = 1 + 2i.$$

Wiemy jednak, że ma rozwiązanie sprzężone z już uzyskanym:

$$\begin{cases} C_1 = y + 2ix - x \\ C_2 = y - 2ix - x. \end{cases}$$

W schemacie postępowania kolejnym krokiem jest podstawienie:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{C_1 + C_2}{2} = \dfrac{y + 2ix - x + y - 2ix - x}{2} = y - x \\ \beta = \dfrac{C_1 - C_2}{2i} = \dfrac{y + 2ix - x - (y - 2ix - x)}{2i} = 2x. \end{cases}$$

Napiszmy sobie jeszcze raz nasze podstawienie:

$$\begin{cases} \alpha = y - x \\ \beta = 2x. \end{cases}$$

4. Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\begin{cases} \alpha_x = -1 \\ \alpha_{xx} = 0 \\ \alpha_y = 1 \\ \alpha_{yy} = 0 \\ \alpha_{xy} = 0 \\ \beta_x = 2 \\ \beta_{xx} = 0 \\ \beta_y = 0 \\ \beta_{yy} = 0 \\ \beta_{xy} = 0 \end{cases}$$

5. Obliczamy pochodne cząstkowe związane z podstawieniami do równania:

$$\begin{cases} U_x = U_\alpha \alpha_x + U_\beta \beta_x - \textit{nie występuje czyli zakładamy, że } U_x = 0 \\ U_y = U_\alpha \alpha_y + U_\beta \beta_y - \textit{nie występuje czyli zakładamy, że } U_y = 0 \\ U_{xx} = U_{\alpha\alpha}(\alpha_x)^2 + 2U_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x + U_{\beta\beta}(\beta_x)^2 + U_\alpha \alpha_{xx} + U_\beta \beta_{xx} = U_{\alpha\alpha}(-1)^2 + 2U_{\alpha\beta}(-1\cdot 2) + U_{\beta\beta}(2)^2 + 0 + 0 \\ U_{xy} = U_{\alpha\alpha}(\alpha_y\alpha_x) + U_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_y + U_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_x + U_{\beta\beta}\beta_y\beta_x + U_\alpha \alpha_{xy} + U_\beta \beta_{xy} = U_{\alpha\alpha}(1\cdot(-1)) + U_{\alpha\beta}(-1\cdot 0) + U_{\alpha\beta}(1\cdot 2) + U_{\beta\beta}(0\cdot 2) + 0 + 0 \\ U_{yy} = U_{\alpha\alpha}(\alpha_y)^2 + 2U_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y + U_{\beta\beta}(\beta_y)^2 + U_\alpha \alpha_{yy} + U_\beta \beta_{yy} = U_{\alpha\alpha}(1)^2 + 2U_{\alpha\beta}1\cdot 0 + U_{\beta\beta}(0)^2 + 0 + 0 \end{cases}$$

Najważniejsze są pochodne drugiego rzędu (można stosować gotowe wzory):

$$\begin{cases} U_{xx} = U_{\alpha\alpha} - 4U_{\alpha\beta} + 4U_{\beta\beta} \\ U_{xy} = -U_{\alpha\alpha} + 2U_{\alpha\beta} \\ U_{yy} = U_{\alpha\alpha} \end{cases}$$

6. Doszliśmy do kroku, w którym wystarczy podstawić otrzymane zależności z punktu 5. do równania wyjściowego jakie jest podane na samym początku zadania. Zrobimy to krok po kroku:

$$U_{\alpha\alpha} - 4U_{\alpha\beta} + 4U_{\beta\beta} + 2(-U_{\alpha\alpha} + 2U_{\alpha\beta}) + 5U_{\alpha\alpha} = 0.$$

Po uproszczeniu wyrażeń podobnych otrzymamy taką postać naszego równania wyjściowego:

$$4U_{\alpha\alpha} + 4U_{\beta\beta} = 0.$$

Możemy jeszcze podzielić obustronnie to równanie przez 4 i w rezultacie otrzymamy postać kanoniczną:

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = 0.$$

(czyli **równanie Laplace'a**)