prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń 2019/2020

Przykładowe zadanie typu "wymagalnego na kolokwium" z pełnym rozwiązaniem:

1) Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego:

$$ux\frac{\partial u}{\partial x} + uy\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

z warunkami (wyjdą dość techniczne wyniki - aby było widać co trzeba wyliczyć):

a) $u(1, y) = \frac{1}{y}$,

b) $u(0, y) = y^2$

c) przechodzące przez krzywą Γ: $x(t) = 1, y(t) = \frac{1}{t^2}, u(t) = \sqrt{t}$.

Ponieważ to równanie quasi-liniowe, to linearyzujemy je. Niech $u = \psi(x, y)$ będzie rozwiązaniem równania. Podstawiamy

$$w(x, y, u) = u - \psi(x, y)$$

i obliczamy jego pochodne cząstkowe:
$\frac{\partial w}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$
(ostatnie z równań wynikają z faktu, że ψ to postać rozwiązania równania). Wstawiamy do równania (po prawej mnożymy przez 1, czyli przez $\frac{\partial w}{\partial u}$) :

$$ux(-\frac{\partial w}{\partial x}) + uy(-\frac{\partial w}{\partial y}) = 1(\frac{\partial w}{\partial u})$$

Przenosimy na jedną stronę i mnożymy przez (-1):

$$ux\frac{\partial w}{\partial x} + uy\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

mamy równanie liniowe funkcji niewiadomej $w(x, y, u)$ (w pewnym zmodyfikowanym obszarze trójwymiarowym!), ale jest ono liniowe jednorodne, a więc wiemy jak je rozwiązać...

Teraz całki pierwsze (niezależne) równania liniowego. Ukad równań charakterystyk

$$\begin{aligned} x' &= u \cdot x \\ y' &= u \cdot y \\ u' &= 1. \end{aligned}$$

W postaci symetrycznej

$$\frac{dx}{ux} = \frac{dy}{uy} = \frac{du}{1} = dt$$

(i ostatni wyraz pomijamy... - nie szukamy rozwiązań).

Dostajemy 2 równania różniczkowe, np.: $\frac{dx}{ux} = \frac{dy}{uy}$ oraz $\frac{dx}{ux} = \frac{du}{1}$.

Pierwsze z nich to $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ (o zmiennych rozdzielonych), czyli $\ln x = \ln y + \tilde{C}_1$. Warto "popracować" nad postacią całki pierwszej: $\ln(\frac{x}{y}) = \tilde{C}_1$ (w warunku początkowym mamy $x = 0$, więc warto mieć x w liczniku). Jeszcze lepiej: $\frac{x}{y} = C_1$ (jak widać: to już inna stała). Taka całka istnieje w każdym obszarze nie zawierającym prostej $y = 0$ na płaszczyźnie). Ostatecznie

$$w_1(x, y, u) = \frac{x}{y}.$$

Nie jest całkowicie przypadkowe, że za drugie równanie wybrałem te, zawierające zmienną x: to ona jest ustalana w warunku początkowym i po jej podstawieniu całki się uproszczą!.

Mamy $\frac{dx}{ux} = \frac{du}{1}$, czyli $\frac{dx}{x} = udu$ (też o zmiennych rozdzielonych). Całkujemy obustronnie: $\ln x = \frac{1}{2}u^2 + \tilde{C}_2$. Nie jest to dobra postać przy badanym warunku, gdyż na $x = 0$ taka całka nie jest określona. Zmieniamy postać (podobnie jak poprzednio, np. korzystamy z różnowartościowości funkcji e^x porównując wartości tej funkcji liczone "po obu stronach" - popularnie cho nieściśle "podnosimy e do obu stron i przyrównujemy): $x = C_2 \cdot \exp\left(\frac{1}{2}u^2\right)$. Stąd:

$$w_2(x, y, u) = x \cdot e^{(-\frac{1}{2}u^2)}.$$

Proszę zauważyć, żw są niezależne (pierwsza zależy od x, a nie od u, a druga odwrotnie, oczywiście można policzyć macierz pochodnych $\frac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x,y,u)}$ (2x3) i jej rząd - wyniesie 2...).

Nie piszemy rozwiązania ogólnego (nie ma tego w zadaniu), za to przechodzimy do warunku brzegowego:

a) Wstawiamy krzywą $x = 1$. Mamy:

$$D_1 = \frac{1}{y}$$

oraz

$$D_2 = 1 \cdot e^{(-\frac{1}{2}u^2)}.$$

Rozwiązujemy układ względem y i u: $y = \frac{1}{D_1}$ oraz $u = \sqrt{\ln(\frac{1}{D_2^2})}$. Czyli na krzywej mamy warunek początkowy:

$$\sqrt{\ln(\frac{1}{D_2^2})} = D_1.$$

W całym badanym obszarze więc:

$$\sqrt{\ln(\frac{1}{C_2^2})} = C_1,$$

czyli

$$-2\ln C_2 = C_1^2$$

i wstawiając za C_1 i C_2:

$$-2\ln x - (-\frac{1}{2}u^2) = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

Oczywiście trzeba to uporządkować i wyznaczyć u (o ile się da, uwaga na dziedzinę):

$$u = \sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\ln x}$$

(w jakiej dziedzinie? co jeśli $x < 0$?)

Proszę zauważyć, że mamy funkcję u, a nie w, choć wstawialiśmy warunkowe rozwiązanie, za to do warunku z wyjściowego równania.

b) Wstawiamy krzywą $x = 0$. Mamy:

$$D_1 = \frac{0}{y} = 0$$

oraz

$$D_2 = 0 \cdot e^{(-\frac{1}{2}u^2)} = 0.$$

I niestety: z tego ukladu nie możemy wyliczyć y oraz u i wstawić do równania! Nie ma rozwiązania przechodzącego przez tę krzywą. Pytanie **dla ambitnych**: czy można znaleźć inny caki pierwsze, aby układ dał się rozwiązać?

c) Wstawiamy Γ: $x(t) = 1, y(t) = \frac{1}{t^2}, u(t) = \sqrt{t}$:

$$D_1 = \frac{1}{\frac{1}{t^2}} = t^2$$

$$D_2 = 1 \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

Czyli: $t = \sqrt{D_1}$ oraz $t = -2 \ln D_2$

$$-2 \ln D_2 = \sqrt{D_1}.$$

Na całym obszarze:

$$-2 \ln C_2 = \sqrt{C_1}$$

i stąd

$$-2 \ln(x \cdot e^{(-\frac{1}{2}u^2)}) = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Jeśli się da, to rozwikłujemy powyższe równanie obliczając $u = u(x, y) =$ ..... (sami, uwaga na obszar).