Zadanie: Określić typ równania. Rozwiąż zagadnienie metodą Fouriera rozdzielania zmiennych:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z warunkami brzegowymi
$u(t,0) = u(t,l) = 0$ oraz
$u(x,0) = x \cdot (x-l)$ dla $x \in (0,l)$.

Rozwiązanie : ("prawie" pełne) Tu mamy od razu postać kanoniczną równania parabolicznego...

Na początku szukamy rozwiązań postaci: $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$. Wstawiamy do równania: $\frac{\partial u}{\partial t} = T'(t) \cdot X(x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) \cdot X''(x)$:

$$T'(t) \cdot X(x) = T(t) \cdot X''(x).$$

Rozdzielamy zmienne (dzielimy obustronnie przez $T(t) \cdot X(x)$):

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Lewa strona jest tylko funkcją zmiennej t, a prawa zmiennej x, czyli są to funkcje równe stałej. Oznaczmy ją przez λ. Dostaniemy

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

czyli dwa równania ró;zniczkowe - pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych:

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

oraz drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Teraz warunki brzegowe: $0 = u(t,0) = T(t) \cdot X(0)$, $0 = u(t,l) = T(t) \cdot X(l)$. Oczywiście $T(t)$ nie może być zerem (bo wtedy $u \equiv 0$ i nie zachodzi ostatni warunek brzegowy). Stąd:

$$X(0) = 0 \qquad , \qquad X(l) = 0.$$

Mamy zagadnienie:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad , \quad X(0) = 0 \quad , \quad X(l) = 0. \tag{1}$$

Uwaga: gdyby ktoś badał ostatni z warunków (on jest niejednorodny, funkcja niezerowa - to istotne!!), to otrzymałby $u(0,x) = T(0) \cdot X(x) = x \cdot (x - l)$, a wię na ogół nie może zajść!

Wracamy do zagadnienie (1). Musimy znaleźć jego wartości własne i funkcje własne - to układ tych ostatnich powinien nam dać układ ortogonalny funkcji pozwalający na rozwijanie funkcji w szeregi Fouriera względem tego układu!

Najpierw wielomian charakterystyczny: $F(k) = k^2 - \lambda$, ma pierwiastki $+\sqrt{\lambda}$ oraz $-\sqrt{\lambda}$, a wię układ fundamentalny rozwiązań to $e^{\sqrt{\lambda}x}$ i $e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Rozwiązanie ogólne:

$$X(x) = A \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Z warunków brzegowych: $0 = X(0) = A + B$ oraz $0 = A \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l}$. Z pierwszego $B = -A$, a więc z drugiego

$$A \cdot (e^{\sqrt{\lambda}l} + e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0.$$

Ponieważ $A \neq 0$ (bo wówczas $B = -A = 0$, czyli $X(x) \equiv 0$ - sprzeczne), to $e^{\sqrt{\lambda}l} + e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$. Otrzymujemy:

$$e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1.$$

Dla $\lambda \geq 0$ mamy tylko jedno rozwiąazanie - przypadek odrzucamy. Dla $\lambda < 0$ mamy

$$e^{2i\sqrt{-\lambda}l} = 1$$

i ze wzorów Eulera: $2\sqrt{-\lambda}l = n\pi$ dla dowolnego n całkowitego. Czyli dla każdego (ustalonego) n (naturalnego!!) mamy inną wartość własną

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{4l^2}$$

(oczywiście, jak już wiemy - ujemne). Odpowiadają im funkcje własne

$$X_n(x) = A_n \cdot e^{\sqrt{\lambda_n}x} + B_n e^{-\sqrt{\lambda}x} = A_n \cdot e^{\frac{in\pi x}{2l}} + B_n e^{\frac{in\pi x}{2l}}.$$

Z reguły, aby unkać funkcji typu $e^{i\varphi}$, poleca się skorzystanie ze wzorów Eulera, a wtedy uzyskamy typowo rzeczywiste funkcje własne:

$$X_n(x) = C_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{2l} + D_n \sin\frac{n\pi x}{2l}.$$

Drugie z równań jest postaci $T'(t) - \lambda T(t) = 0$, a po rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{dT}{T} = \lambda \, dt.$$

Po całkowaniu mamy więc: $\ln T = \lambda t + E_*$ (E_* - dowolna stała) i ostatecznie

$$T(t) = E \cdot e^{\lambda t}.$$

Po wstawieniu wartości własnych mamy funkcje

$$u_n(t,x) = \left(C_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{2l} + D_n \sin \frac{n\pi x}{2l} \right) \cdot E_n \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4l^2}}.$$

każda z nich spełnia równanie i dwa jednorodne warunki brzegowe. Rozważmy więc funkcje

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n E_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{2l} + D_n E_n \sin \frac{n\pi x}{2l} \right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4l^2}}.$$

Musimy tak dobrać współczynniki, aby spełniony byłostatni warunek brzegowy (niejednorodny). Dla $t = 0$ mamy

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n E_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{2l} + D_n E_n \sin \frac{n\pi x}{2l} \right).$$

Rozwijamy teraz funkcję $g(x) = x \cdot (x - l)$ w szereg Fouriera na przedziale $(0, l)$ (zauważmy, że zakładamy tu równość funkcji i jej szeregu Fouriera...):

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{2l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2l} \right),$$

gdzie a_n i b_n są dane wzorami Eulera-Fouriera (**samodzielnie** przypomnieć wzory), czyli dla danej funkcji g możemy je łatwo obliczyć (to też samodzielnie, tylko całkowania...)!

Wtedy biorąc $C_n E_n = a_n$ oraz $D_n E_n = b_n$ uzyskamy żądany wynik

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{2l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2l} \right) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{4l^2}}.$$

Na zakończenie ważne pytanie: czy ten szereg jest zbieżny jednostajnie wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie??? Tylko wtedy będzie klasycznym rozwiązaniem.