prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń 2019/2020

Zagadnienie Cauchy'ego:

Streszczę materiały przedstawiając pewien algorytm postępowania:

1. Badamy równanie - znajdujemy wszystkie całki pierwsze niezależne.
2. Sprawdzamy ich zachowanie na krzywych zadanych przez warunek, tj. "wstawiamy" go do całek.
3. Tak uzyskany układ równań rozwiązujemy (o ile się da...) względem zmiennych niezależnych redukując parametry - powstanie (czasami uwikłana) postać rozwiązania.
4. UWAGA: W jednym z poprzednich materiałów pokazaem, że ukad taki może być też sprzeczny (nie ma rozwiązań zagadnienia) lub nieoznaczony (zagadnienie ma nieskończenie wiele rozwiązań).

A) Coś dla przećwiczenia procedury.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 1$$

z warunkiem na krzywej $\Gamma : y(x) = x + x^2$, $u|_\Gamma = \sin x$.

ad 1) Streszczając - układ równań (zlinearyzownego) równania (od razu w postaci symetrycznej):

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{1-u}.$$

Całki pierwsze - natychmiastowe (to są 2 równania różniczkowe): $dx = dy$ czyli $x - y = C_1$ oraz $dy = \frac{du}{1-u}$, czyli $y + \ln(1-u) = C_2$ (nie prowdzę dyskusji o założeniach).

ad 2) Ten układ równań na krzywej Γ ma postać: $x - x - x^2 = -x^2 = \tilde{C}_1$ oraz $x + x^2 + \ln 1 - u = \tilde{C}_2$ (tak przy okazji: inna postać całek pierwszych uławiłaby rozwiązywanie - do przemyślenia...).

ad 3) Uzyskamy

$$x = \sqrt{-\tilde{C}_1}\,, u = 1 - \exp(\tilde{C}_2 + \tilde{C}_1 - \sqrt{-\tilde{C}_1}).$$

Tu wzór na u określa $u|_\Gamma$.

ad 4) Na całej dziedzinie: przywracamy pierwotne wartości całek tj. C_1 i C_2 wstawiając do warunku Cauchy'ego:

$$u|_{\Gamma} = \sin x$$

$$1 - \exp(\tilde{C}_2 + \tilde{C}_1 - \sqrt{-\tilde{C}_1}) = \sin(\sqrt{-\tilde{C}_1})$$

i wstawiamy poza krzywą:

$$1 - \exp(C_2 + C_1 - \sqrt{-C_1}) = \sin(\sqrt{-C_1}).$$

Wystarczy wstawić C_1 i C_2...

$$1 - \exp(y + \ln(1-u) + (x-y) - \sqrt{-x-y}) = \sin(\sqrt{-x-y}).$$

... i uprościć (rozwikłać względem u jak się da - tu: tak, ale to już ćwiczenie dla czytelników).

B) Teraz przykład [2 punkt d)]:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$$

spełniające warunek: $u(1,y) = 1 + y + 3y^2$.

ad 1) Streszczając - układ równań (zlinearyzownego) równania (od razu w postaci symetrycznej)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{xy} = \frac{du}{x^2+y^2}.$$

Stąd $xdx = dy$, a więc $x^2 - 2y = C_1$. Jak zwykle (:-)) druga całka jest mniej trywialna, ale bez przesady... Ponownie jest kilka możliwości i moje rozwiązanie nie jest jedynym możliwym - zachęcam do samodzielnego znalezienia tej całki pierwszej.

A dla niecierpliwych - proszę czytać na kolejnej stronie...

Skoro mamy już jedną całkę pierwszą (!!), to problem można uprościć. Formalnie jest to **zamiana zmiennych**:

$$s = x \qquad , \qquad t = x^2 - 2y.$$

To zmienne niezależne (sprawdzić jakobian). Należy znaleźć postać równania w nowych zmiennych.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 2x$$

oraz (wzór będzie bardzo potrzebny - proszę poćwiczyć)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -2 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}.$$

(na razie nie wstawiam za x czy y - a powinienem :-(, zrobimy to później). Wstawiamy do równania:

$$y(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 2x) + xy(-2 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}) = x^2 + y^2.$$

Równanie się upraszcza:

$$y\frac{\partial u}{\partial s} = x^2 + y^2$$

i teraz:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{s^2 + (s^2 - t)^2}{s^2 - t},$$

a po całkowaniu:

$$u(s,t) = \int \frac{s^2 + (s^2 - t)^2}{s^2 - t}\, ds$$

liczymy całkę i wracamy do starych zmiennych - ale to już ćwiczenia z analizy, więc samodzielnie! tak wyliczymy drugą z całek pierwszych i dalej zgodnie ze schematem.