Równania Różniczkowe Cząstkowe ROR 410
Ćwiczenia 4

Równania liniowe niejednorodne i równania quasi-liniowe.

Definicja 1 *Równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym niejednorodnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = g(x,u), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1}$$

w którym funkcja g nie jest tożsamościowo równa zero lub funkcja g jest tożsamościowo równa zero, ale funkcje $f_1, f_2, ..., f_n$ zależą w sposób istotny od zmiennej u (równania quasi-liniowe).

Zakładamy, że funkcje $f_1, f_2, ..., f_n, g$ są klasy C^1 w otoczeniu punktu $a_0(a_1, ..., a_n, u)$, nie zerują się jednocześnie w tym otoczeniu oraz

$$f_n(a_0) \neq 0.$$

Załóżmy, że szukamy rozwiązania równania (1) w postaci:

$$v(x_1, ..., x_n, u) = 0, \tag{2}$$

gdzie funkcja v ma ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów w pewnym obszarze ich zmienności, w którym leży punkt a_0
i w którym równanie (2) jest rozwiązywalne względem szukanej funkcji u, przy czym

$$\frac{\partial v}{\partial u}(a_0) \neq 0.$$

Twierdzenie 2 *(o sprowadzaniu równania liniowego niejednorodnego do równania liniowego jednorodnego)*
Równanie (1) jest rówoważne równaniu

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x,u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + g(x,u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0, \quad x = (x_1, ..., x_n). \tag{3}$$

Oznacza to, że każde rozwiązanie równania (3) zawierające u po przyrównaniu go do zera daje związek (2), który wyznacza funkcję n zmiennych $x_1, ..., x_n$ spełniającą równanie (1).

Układ równań różniczkowych zwyczajnych odpowiadający równaniu (1) zapisujemy w postaci

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,...,x_n,u)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x_1,...,x_n,u)} = \frac{du}{g(x_1,...,x_n,u)}. \tag{4}$$

Niech $\Psi_{0,...,}\Psi_{n-1}$ stanowią układ n niezależnych całek układu (4).

Wówczas rozwiązanie ogólne równania (1) wyraża się wzorem:

$$v = F(\Psi_0, ..., \Psi_{n-1}),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną w sposób ciągły. Zatem rozwiązanie ogólne przyjmuje postać uwikłaną

$$F(\Psi_0(x_1,...,x_n,u), ..., \Psi_{n-1}(x_1,...,x_n,u)) = 0. \tag{5}$$

Definicja 3 *Układ równań różniczkowych zwyczajnych (4) nazywamy układem charakterystycznym równania (1), a jego rozwiązania charakterystykami tego równania.*

Definicja 4 *(o rozwiązaniu ogólnym równania (1)) Jeżeli funkcje $\Psi_0, ..., \Psi_{n-1}$ są niezależnymi całkami układu równań (4), to funkcja określona wzorem (5) z funkcją F mającą ciągłe pochodne cząstkowe względem swoich argumentów przedstawia rozwiązanie ogólne równania (1).*

Uwaga 5 *Jeżeli funkcja niewidoma występuje tylko w jednej z całek $\Psi_0, ..., \Psi_{n-1}$ np. w Ψ_{n-1} to rozwiązanie ogólne możemy zapisać w postaci:*

$$\Psi_{n-1}(x_1,...,x_n,u) = G(\Psi_0(x_1,...,x_n), ..., \Psi_{n-2}(x_1,...,x_n)), \tag{6}$$

gdzie G jest dowolną funkcją różniczkowalną w sposób ciągły.

Rozwiązując powyższe równanie względem u otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (1) w postaci jawnej.

Schemat rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych niejednorodnych pierwszego rzędu.

1. Tworzymy układ równań charakterystyk równania (4).

2. Znajdujemy n niezależnych całek pierwszych tego równania

$$\Psi_i(x_1,...,x_n,u) = c_i, \text{ gdzie } i = 0, 1, ..., n-1.$$

3. Zapisujemy rozwiązanie ogólne równania (1) w postaci (5) lub (6).

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania liniowego niejednorodnego formułuje się analogicznie jak dla równania liniowego jednorodnego.

Schemat rozwiązywania zagadnienia Cauchy'ego dla równania niejednorodnego.

1. Tworzymy układ równań charakterystyk.
2. Znajdujemy n niezależnych całek pierwszych tego układu w postaci

$$\Psi_i(x_1, ..., x_n, u) = c_i, \text{ gdzie } i = 0, 1, ..., n-1.$$

3. W powyższych równaniach zmienną x_n zastępujemy wartością $x_n^{(0)}$ otrzymując równania:

$$\Psi_i(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \xi_i, \text{ gdzie } i = 0, 1, ..., n-1.$$

4. Rozwiązujemy powyższy układ równań ze względu na $x_1, ..., x_{n-1}, u$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(\xi_1, ..., \xi_{n-1}), \text{ gdzie } i = 1, ..., n-2, \\ u &= \varphi_0(\xi_1, ..., \xi_{n-1}). \end{aligned}$$

5. Piszemy zależność:

$$\varphi_0(\Psi_0, ..., \Psi_{n-2}) - \varphi(\varphi_1(\Psi_0, ..., \Psi_{n-2}), ..., \varphi_{n-2}(\Psi_0, ..., \Psi_{n-2})) = 0.$$

6. Po rozwiązaniu powyższego równania względem u, otrzymujemy rozwiązanie danego zagadnienia Cauchy'ego w postaci jawnej.

Przykład 6 *Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania*

$$xuu_x + yuu_y = -xy$$

oraz jego rozwiązanie szczególne przechodzące przez krzywą

$$y = x^2, \ u = x^3.$$

Rozwiązanie 7 *Tworzymy układ równań*

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-xy}.$$

i znajdujemy jego niezależne całki pierwsze

$$\frac{x}{y} = c_{1,} u^2 + xy = c_2$$

Rozwiązanie ogólne naszego równania przyjmuje postać

$$F(\frac{x}{y}, u^2 + xy),$$

gdzie F jest dowolną funkcją.
Ponieważ zmienna u wchodzi w skład tylko jednej całki pierwszej, więc rozwiązanie ogólne możemy zapisać w postaci

$$u^2 + xy = G(\frac{x}{y})$$

lub

$$u = \pm\sqrt{G(\frac{x}{y}) - xy},$$

gdzie G jest dowolną funkcją.
Dla znalezienia powierzchni całkowej przechodzącej przez podaną krzywą, równanie tej krzywej sprowadzamy do postaci parametrycznej

$$x = t,\ \ y = t^2,\ \ u = t^3.$$

Podstawiając te równania do całek pierwszych, otrzymujemy

$$\frac{1}{t} = c_{1,} t^6 + t^3 = c_2,$$

a po wyrugowaniu zmiennej t

$$\frac{1}{c_1^6} + \frac{1}{c_1^3} = c_{2.}$$

Podstawiając w miejsce c_1 i c_2 lewe strony całek pierwszych, otrzymujemy szukane rozwiązanie szczególne w postaci

$$(\frac{y}{x})^6 + (\frac{y}{x})^3 = u^2 + xy$$

lub

$$y^3(y^3 + x^3) = x^6(u^2 + xy).$$

Przykład 8 *Znajdziemy powierzchnię całkową równania*

$$xu_x + (x+y)u_y = \frac{1}{u},$$

przechodzącą przez parabolę

$$y = x^2, \ u = 0$$

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{x+y} = udu,$$

co daje

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \ i \ \frac{dx}{x} = udu.$$

Pierwsze równanie jest równaniem jednorodnym, które po podstawieniu $y = zx$ przechodzi w równanie

$$x\frac{dz}{dx} + z = 1 + z,$$

mające rozwiązanie

$$z = \ln|x| + c_1.$$

Zatem odpowiadająca mu całka pierwsza ma postać

$$\frac{y}{x} - \ln|x| = c_1.$$

Drugie równanie daje

$$\ln|x| = \frac{u^2}{2} + \frac{c_2}{2},$$

czyli

$$\ln x^2 - u^2 = c_2,$$

przy tym obie całki pierwsze są niezależne.
Tak więc każda powierzchnia całkowa naszego równania ma postać

$$F(\frac{y}{x} - \ln|x|\,,\ \ln x^2 - u^2) = 0,$$

gdzie F jest dowolną funkcją.
Równania danej paraboli można zapisać w postaci parametrycznej

$$x = t,\ \ y = t^2,\ \ y = 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned} t - \ln|t| &= c_1, \\ 2\ln|t| &= c_2, \end{aligned}$$

a więc

$$t \pm e^{\frac{c_2}{2}}$$

i mamy

$$\pm e^{\frac{c_2}{2}} - \frac{c_2}{2} = c_{1.}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\pm e^{\frac{1}{2}(\ln x^2 - u^{2)}} - \frac{1}{2}(\ln x^2 - u^{2)} = \frac{y}{x} - \ln|x|$$

a po uporządkowaniu

$$\pm 2x\,|x|\,e^{\frac{u^2}{2}} + xu^2 - 2y = 0,$$

co jest równaniem szukanej powierzchni całkowej.

Przykład 9 *Poszukamy rozwiązania szczególnego równania*

$$u_x + u_y + u + x + y = 0,$$

spełniającego warunek $u(x, 0) = x$.

Rozwiązanie 10 *Tworzymy najpierw równania charakterystyk*

$$dx = dy = \frac{du}{-(u + x + y + 2)},$$

stąd

$$y - x = c_1.$$

oraz

$$\frac{du}{dx} = -u - 2x - 2 - c_1.$$

Po scałkowaniu ostatniego równania mamy

$$u = c_2 e^{-x} - 2x - c_1.$$

Całki pierwsze mają postać

$$y - x = c_1 \;\; i \;\; e^x(u + x + y) = c_2.$$

Podstawiając $y = 0$, *mamy*

$$\begin{aligned} -x &= c_1, \\ e^x(u + x) &= c_2. \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned} x &= -c_1, \\ u &= c_2 e^{c_1} + c_1. \end{aligned}$$

Zgodnie ze wzorem

$$u(x, 0) = x$$

mamy

$$c_2 e^{c_1} + c_1 = -c_{1,}$$

czyli

$$c_2 e^{c_1} = -2c_{1,}$$

a więc

$$e^x(u + x + y)e^{y-x} = -2(y - x).$$

Ostatecznie szukane rozwiązanie ma postać

$$u = 2(x - y)e^{-y} - x - y.$$

Rozwiązanie 11 *Wyznaczmy rozwiązanie ogólne równania*

$$(y + z + u)u_x + (x + z + u)u_y + (x + y + u)u_z = x + y + z.$$

W tym przypadku należy scałkować układ równań

$$\frac{dx}{y + z + u} = \frac{dy}{x + z + u} = \frac{dz}{x + y + u} = \frac{du}{x + y + z},$$

który możemy sprowadzić do postaci

$$\frac{dy - dx}{x - y} = \frac{dz - dx}{x - z} = \frac{du - dx}{x - u} = \frac{dx + dy + dz + dt}{3(x + y + z + u)}.$$

Całkując powyższe równania, otrzymujemy trzy niezależne całki pierwsze

$$\begin{array}{rcl} (y - x)^3(x + y + z + u) & = & c_1, \\ (z - x)^3(x + y + z + u) & = & c_{2,} \\ (z - x)^3(x + y + z + u) & = & c_3 \end{array}$$

Zatem rozwiązanie ogólne naszego równania ma postać

$$F((y - x)^3(x + y + z + u), (z - x)^3(x + y + z + u), (u - x)^3(x + y + z + u)) = 0,$$

gdzie F jest dowolną funkcją.

1. Rozwiąż równania:

a)
$$xu_x + yu_y = u,$$

b)
$$yu_x - xu_y = 2xyu,$$

c)
$$xyu_x + yu_y = u,$$

d)
$$y^2u_x - xyu_y = x\left(u - 2y\right),$$

e)
$$x^2yu_x + xy^2u_y = u,$$

f)
$$xu\ u_x + yu\ u_y = xy,$$

g)
$$yu\ u_x + xu\ u_y = -2xy,$$

h)
$$\left(xu + y\right)u_x + \left(x + yu\right)u_y = 1 - u^2,$$

i)
$$x\left(y - u\right)u_x + y\left(u - x\right)u_y = u\left(x - y\right),$$

j)
$$\left(\sin x\right)u_x + \left(\sin y\right)u_y = \sin u,$$

k)
$$\left(\sin^2 x\right)u_x + \left(tgu\right)u_y = \cos^2 u,$$

l)
$$yu_x + yu_y + \left(z + u\right)u_z = xy,$$

ł)
$$\left(u - x\right)u_x + \left(u - y\right)u_y - zu_z = x + y,$$

m)
$$\left(y + z\right)u_x + \left(z + x\right)u_y + \left(x + y\right)u_z = u.$$

2. Wyznaczyć rozwiązania równań spełniających warunek początkowy:

a)

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u - x^2 - y^2, \\ u(x,-2) &= x - x^2, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u - xy, \\ u(2,y) &= y^2 + 1, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} xu_x - 2yu_y &= x^2 + y^2, \\ u(x,1) &= x^2, \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} yu_x + xyu_y &= x^2 + y^2, \\ u(1,y) &= 1 + y + 3y^2, \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} yu_x + xyu_y &= u\left(x^2 + y^2\right), \\ u(x,1) &= \left(x^2 - 1\right)^2 \exp x, \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y - yzu_z &= x^2 + y^2, \\ u(1,y,z) &= -y^2 + y + 1 + \frac{1}{ez}, \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y - xzu_z &= x^2 + y^2, \\ u(1,y,z) &= -\frac{y^2}{2} + ezy + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} x^2u_x + y^2u_y - y^5zu_z &= x^3 + y^3, \\ u(x,2,z) &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \ln|z| + \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

3. Wyznaczyć powierzchnię całkową równania, przechodzącą przez podaną krzywą:

a)

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u, \\ x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ u &= 1, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (tgx)\,u_x + yu_y &= u, \\ x &= t, \\ y &= t, \\ u &= t^3, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} xyu_x - y^2u_y &= -x^2, \\ x &= 3t, \\ y &= t^2, \\ u &= t^3 - 3, \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u, \\ x + y &= 2, \\ y - u &= 1, \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} (y + xu)\,u_x - (x + yu)\,u_y &= x^2 - y^2, \\ u &= x^2 + y^2, \\ u &= -xy, \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} (x - y)\,u_x + (y - x - u)\,u_y &= u, \\ x^2 + y^2 &= 1, \\ u &= 1. \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}(x-y)\,y^2u_x+(y-x)\,x^2u_y &= \left(x^2+y^2\right)u,\\ u\,(x,0) &= \frac{a^3}{x},\end{aligned}$$

h.

$$\begin{aligned}x^2u_x+y^2u_y-y^5zu_z &= x^3+y^3,\\ u\,(x,2,z) &= \frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+\ln z+\frac{13}{2},\end{aligned}$$

i.

$$\begin{aligned}xu_x+yu_y-xzu_z &= x^2+y^2,\\ u\,(1,y,z) &= -\frac{y^2}{2}+eyz+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Uwaga 12 *Elementy teorii i zadania zostały zaczerpnięte z [1].*