Równania Różniczkowe Cząstkowe ROR 410
Ćwiczenia 6 i 7

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE DRUGIEGO RZĘDU.

Równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu z niewiadomą funkcją $u(x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych x, y, liniowe względem funkcji $u(x, y)$ i jej pochodnych do drugiego rzędu włącznie, w postaci ogólnej określa równość

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + au = f. \tag{1}$$

Funkcje rzeczywiste a_{ij}, a_k i a $(i, j, k = 1, 2)$ są określone i ciągłe w pewnym obszarze $\Omega \subset R^2$,

$$a_{11}^2(x, y) + a_{12}^2(x, y) + a_{22}^2(x, y) \neq 0$$

dla każdego $(x, y) \in \Omega$, a niewiadomej funkcji u szukamy w przestrzeni $C^2(\Omega)$.
Funkcje a_{ij}, a_k nazywamy współczynnikami , $f(x, y)$-wyrazem wolnym.

Wyróżnikiem równania (1) nazywamy

$$\Delta(x, y) = - \begin{vmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{12}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{vmatrix} = a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y).$$

Jeżeli
$\Delta(x, y) > 0$ w obszarze Ω, to mówimy, że równanie (1) jest typu hiperbolicznego,
$\Delta(x, y) = 0$ w obszarze Ω, to mówimy, że równanie (1) jest typu parabolicznego,
$\Delta(x, y) < 0$ w obszarze Ω, to mówimy, że równanie (1) jest typu eliptycznego.

Jeżeli równanie (1) nie jest jednego typu w całym obszarze Ω, to nazywamy je równaniem mieszanym.

Każde równanie różniczkowe postaci (1) da się przez odpowiednią zamianę zmiennych x, y na nowe zmienne ξ, η sprowadzić do postaci kanonicznej (patrz wykład).

Znajdziemy przekształcenie sprowadzajace równanie (1) do postaci kanonicznej. Wprowadzmy nowe współrzędne krzywoliniowe (1):

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,y), \\ \eta &= \psi(x,y). \end{aligned}$$

Zakładamy, że funkcje $\varphi_i (i = 1, 2) \in C^2$ i ich jakobian w rozważanym obszarze spełnia warunek

$$J = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wówczas istnieją funkcje $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$

$$x = \bar{\varphi}(\xi,\eta), \; y = \bar{\psi}(\xi,\eta) \tag{2}$$

oraz funkcja v taka, że

$$u\,(x,y) = u\left(\bar{\varphi}(\xi,\eta)\bar{\psi}(\xi,\eta)\right) = v(\xi,\eta)$$

Wykonując różniczkowanie funkcji u otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \\ u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}\eta_x^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}\eta_y^2 + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}, \end{aligned}$$

i podstawiając wyniki równania (2) do równania (1), otrzymujemy równanie z nowymi zmiennymi.

Równaniem charakterystyk równania (1) nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne utworzone z równania (1) postaci:

$$a_{11}(x,y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2a_{12}(x,y)\frac{dy}{dx} + a_{22}(x,y) = 0, \text{ jeśli } a_{11}(x,y) \neq 0, \tag{3}$$

inna równoważna postać równania (3):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}(x,y) \pm \sqrt{\Delta(x,y)}}{a_{11}(x,y)}$$

lub

$$a_{22}(x,y)(\frac{dx}{dy})^2 - 2a_{12}(x,y)\frac{dx}{dy} + a_{11}(x,y) = 0, \text{ jeśli } a_{22}(x,y) \neq 0 \qquad (4)$$

postać równoważna dla równania (4) jest następująca

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12}(x,y) \pm \sqrt{\Delta(x,y)}}{a_{22}(x,y)}.$$

Jeżeli $a_{11}(x,y) \neq 0$ i $a_{22}(x,y) \neq 0$, to równania te są równoważne.

Rozwiązania równań(3) i (4) nazywamy charakterystykami równania(1).

Naszym celem jest wyznaczenie rozwiązania równania (1). Ponieważ znalezienie rozwiązania w ogólnym przypadku jest zadaniem bardzo trudnym, dlatego celowe jest sprowadzenie danego równania do postaci kanonicznej, która na ogół jest prostsza w porównaniu z danym równaniem.

Schemat sprowadzania równań drugiego rzędu do postaci kanonicznej

1. Określamy typ równania (obliczmy wyróżnik $\Delta(x,y)$).
2. Piszemy rówanie charakterystyczne (3),(4).
3. Obliczamy charakterystyki: $c_1 = \varphi(x,y), c_2 = \psi(x,y)$.
4. Wprowadzamy nowe zmienne w zależności od typu równania:

   – równanie hiperboliczne:

   $$\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y);$$

   – równanie paraboliczne:

   $$\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi \in C^1$$

   ψ jest dowolną funkcją zmiennych x, y funkcyjnie niezależną od φ; zwykle obieramy $\psi(x,y) = x$ lub $\psi(x,y) = y$;

– równanie eliptyczne :
  ma dwie urojone (zespolone sprzężone) charakterystyki:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \alpha(x,y) + i\beta(x,y)\\ \psi(x,y) &= \alpha(x,y) - i\beta(x,y)\end{aligned}$$

  gdzie α jest częścią rzeczywistą charakterystyki a β częścią urojoną;

$$\xi = \alpha(x,y), \eta = \beta(x,y).$$

5. Korzystamy ze wzorów transformacyjnych.

Zadania. Sklasyfikować i sprowadzić poniższe równania do postaci kanonicznej.

1. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$,
2. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} = 0$,
3. $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$,
4. $u_{xx} - 2x u_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = 0$,
5. $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$,
6. $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$.
7. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + 2x u_y + xy - x = 0$.