Wykład 2

Struna nieograniczona

2.1 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania jednorodnego

Równanie drgań struny jednowymiarowej zapisać można w postaci

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \text{ dla } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2.1}$$

gdzie $u(x,t)$ oznacza wychylenie struny z położenia równowagi w punkcie x, w chwili czasu t. Funkcja $f(x,t)$ przedstawia gęstość siły zewnętrznej, działającej na strunę. Postać ta jest równoważna postaci (1.2). Dla powyższego równania rozważać będziemy zagadnienie początkowe w przypadku jednorodnym (drgania swobodne) i niejednorodnym (drgania wymuszone).

Załóżmy, że mamy do czynienia z drganiami swobodnymi, tzn. $f \equiv 0$. Rozważamy następujące zagadnienie.

Wyznaczyć funkcję u spełniającą równanie (2.1) i warunki początkowe

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right) \text{ dla } x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Zakładamy, że φ jest klasy C^2, zaś ψ jest klasy C^1.

Zagadnienie (2.1)-(2.2) rozwiążemy stosując metodę d'Alemberta.

Stosując w równaniu (2.1) zamianę zmiennych $\xi = x+ct$, $\eta = x-ct$ sprowadzamy je do postaci kanonicznej

$$u_{\xi\eta} = 0$$

(porównaj (1.9)). Ogólne rozwiązanie tego równania wyraża się wzorem

$$u = F\left(\xi\right) + G\left(\eta\right),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy C^2. Wracając do zmiennych x i t otrzymujemy

$$u\left(x,t\right) = F\left(x+ct\right) + G\left(x-ct\right). \tag{2.3}$$

Funkcje F i G należy dobrać w ten sposób, aby spelnione były warunki początkowe (2.2). Warunki (2.2) prowadzą do układu równań funkcyjnych

$$\begin{cases} F\left(x\right) + G\left(x\right) &= \varphi\left(x\right) \\ cF'\left(x\right) - cG'\left(x\right) &= \psi\left(x\right), \end{cases}$$

z których łatwo wyznaczamy wzory na funkcje szukane

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds \text{ i } G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds. \tag{2.4}$$

Podstawiając wzory (2.4) do (2.3) otrzymujemy tzw. *wzór d'Alemberta* dla struny swobodnej

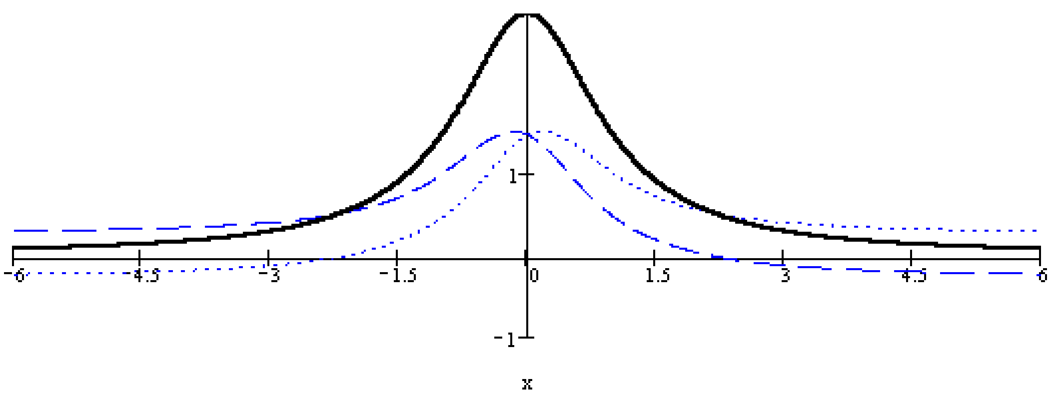
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds. \tag{2.5}$$

Z powyższych wzorów wynika, że zaburzenie kształtu struny spowodowane przez przyjęte warunki początkowe rozchodzi się ze skończoną prędkością wzdłuż osi Ox. Funkcja $G(x-ct)$ występująca we wzorze (2.3) przedstawia falę rozchodzącą się z prędkością c w dodatnim kierunku osi Ox, zaś funkcja $F(x+ct)$ - falę rozchodzącą się z prędkością c w ujemnym kierunku osi Ox. Rozwiązanie $u(x,t)$ jest sumą tych dwóch fal.

P r z y k ł a d 1
Rozwiązać zagadnienie (2.1)-(2.2) przyjmując $c = 1$, oraz

$$\varphi(x) = \frac{3}{1+x^2}, \quad \psi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{dla } |x| \le 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia kształt struny w chwili początkowej wraz z rozkładem na funkcje F (linia kropkowana) oraz G (linia kreskowana).

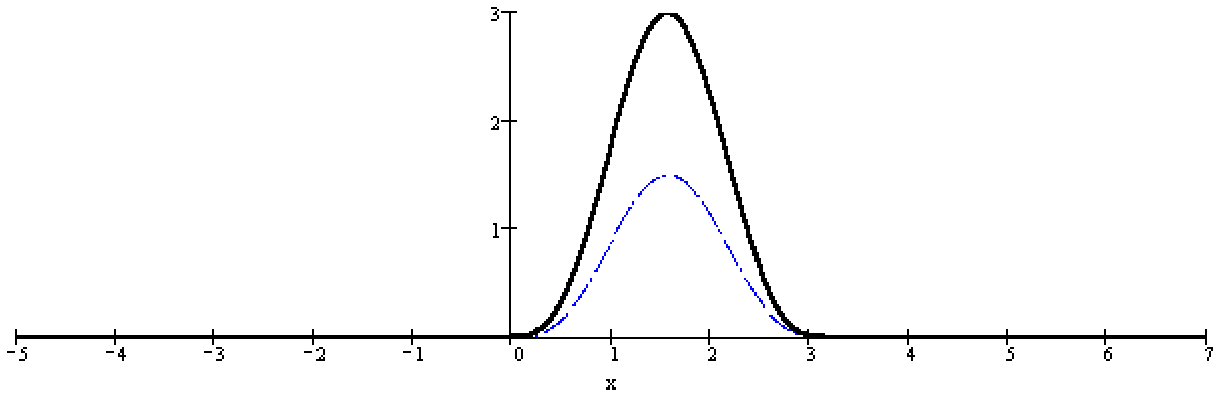


■

P r z y k ł a d 2
Rozwiązać zagadnienie (2.1)-(2.2) przyjmując $c = 1$, $\psi \equiv 0$ oraz

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3\sin^3 x & \text{dla } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,\pi]. \end{cases}$$

Następny rysunek przedstawia kształt struny w chwili początkowej wraz z rozkładem na funkcje F i G. W tym przypadku funkcje te są identyczne.



Rozdzielenie zaburzenia następuje w chwili $t = \frac{\pi}{2}$.

■

2.2 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania niejednorodnego

Rozważmy teraz zagadnienie niejednorodne dla równania (2.1) z jednorodnymi warunkami początkowymi (2.2), tzn $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Rozważmy funkcję $u(x,t)$ określoną wzorem

$$u(x,t) = \frac{1}{2}c \int_0^t dr \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s,r)ds. \tag{2.6}$$

Poprzez bezpośrednie różniczkowanie łatwo sprawdzić, że funkcja u spełnia równanie (2.1) oraz, że $u(x,0) = 0$. Ponieważ

$$u_t(x,t) = \int_0^t v_t(x,t;r)\,dr, \quad \text{gdzie } v(x,t;r) = \frac{1}{2}c \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s,r)ds,$$

więc również $u_t(x,0) = 0$.

Wynika stąd, że rozwiązanie zagadnienia początkowego (2.1)-(2.2) można zapisać jako sumę rozwiązania danego wzorem d'Alemberta (2.5) i funkcji u określonej wzorem (2.6).

W ten sposób otrzymujemy *wzór d'Alemberta dla równania niejednorodnego*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds + \frac{1}{2}c\int_0^t dr \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s,r)ds \tag{2.7}$$

2.3 Stabilność rozwiązania

Niech u_1 i u_2 będą rozwiązaniami zagadnienia (2.1)-(2.2) odpowiednio dla par funkcji danych (φ_1, ψ_1) i (φ_2, ψ_2). Załóżmy, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \quad \text{i} \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta. \tag{2.8}$$

Na mocy wzoru d'Alemberta (2.7) można napisać, że

$$u_i(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_i(x-ct) + \varphi_i(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi_i(s)ds + \frac{1}{2}c\int\limits_0^t dr \int\limits_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s,r)ds \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Jeśli rozważać będziemy ewolucję kształtu struny w przedziale czasowym $[0, T_0]$, to korzystając z (2.8) różnicę pomiędzy rozwiązaniami u_1 i u_2 możemy oszacować następująco

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \frac{1}{2}|\varphi_1(x+ct) - \varphi_2(x+ct)| + \frac{1}{2}|\varphi_2(x-ct) - \varphi_2(x-ct)| +$$

$$+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(s) - \psi_2(s)|\, ds < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2c}2cT_0\delta = \delta\left(1 + T_0\right). \tag{2.9}$$

Ostatnia nierówność oznacza, że powyższe zagadnienie jest stabilne. O ile bowiem warunki początkowe zadania nie różnią się o więcej niż o δ, to również rozwiązania w dowolnym zadanym lecz ustalonym przedziale czasowym nie różnią się o więcej niż o liczbę $\delta(1 + T_0)$. Oznacza to ciagłą zależność rozwiązania od warunków początkowych, ponieważ $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \delta(1 + T_0) = 0$.

W takim razie zagadnienie Cauchy'ego dla równania struny jest poprawnie postawione.

2.4 Struna jednostronnie ograniczona

Rozważmy zagadnienie polegające na znalezieniu rozwiązania równania drgań półograniczonej struny swobodnej

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ dla } x{>}0,\ t > 0, \tag{2.10}$$

z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \ \text{ dla } x > 0. \tag{2.11}$$

2.4.1 Struna z zamocowanym końcem

W tym przypadku poszukujemy funkcji u spełniającej dodatkowy warunek $u(0,t) \equiv 0$. O funkcjach danych φ i ψ założymy, że spełniają one tzw. warunki zgodności

$$\varphi\left(0^+\right) = 0,\ \psi\left(0^+\right) = 0. \tag{2.12}$$

Dodatkowo zakładamy, że φ', φ'', ψ' są ciągłe na półprostej $[0, +\infty)$.

W celu rozwiązania powyższego zagadnienia, funkcje φ i ψ przedłużamy do funkcji nieparzystych określonych na całej osi rzeczywistej. Warunki (2.12) gwarantują ciągłość otrzymanych przedłużeń. Następnie, dla tak określonych przedłużeń, stosujemy wzór d'Alemberta dla struny swobodnej (2.5)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds. \tag{2.13}$$

Podstawiając $x = 0$ otrzymujemy

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(-ct) + \varphi(ct)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{-ct}^{ct} \psi(s)ds = \frac{1}{2}\left(-\varphi(ct) + \varphi(ct)\right) = 0$$

na mocy nieparzystości funkcji danych φ i ψ. Oznacza to, że u jest rozwiązaniem zagadnienia drgań struny z zamocowanym końcem.

2.4.2 Struna ze swobodnym poziomym końcem

Rozważamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu rozwiązania u, spełniającego dodatkowo warunek $u_x(0,t) = 0$ (koniec struny może poruszać się swobodnie w pionie, np. w prowadnicy dla $x = 0$). O funkcjach danych φ i ψ założymy, że spełniają one tzw. warunki zgodności

$$\varphi'\left(0^+\right) = 0,\ \psi'\left(0^+\right) = 0. \tag{2.14}$$

Zakładamy również, że φ', φ'', ψ' są ciągłe na półprostej $[0, +\infty)$.

W celu rozwiązania powyższego zagadnienia, funkcje φ i ψ przedłużamy do funkcji parzystych określonych na całej osi rzeczywistej (wówczas pochodna φ' jest nieparzysta). Stosując podobnie jak poprzednio, wzór d'Alemberta (2.5) przedstawiamy rozwiązanie u w postaci (2.13).

Wynika stąd, że

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x-ct) + \varphi'(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\psi(x+ct) - \psi(x-ct)\right)$$

oraz

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(-ct) + \varphi'(ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\psi(ct) - \psi(-ct)\right) = 0$$

na mocy nieparzystości funkcji φ' i parzystości funkcji ψ. Oznacza to, że u jest rozwiązaniem rozważanego zagadnienia.

2.5 Wzór Kirchhoffa

Rozważmy funkcję $u = u(x,y,z,t)$ spełniającą równanie falowe w przypadku trzech zmiennych przestrzennych, tzn. równanie

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}u_{tt} = -f(x,y,z,t). \tag{2.15}$$

Niech punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ należy do obszaru V ograniczonego powierzchnią S.

Wówczas można udowodnić, że wartość szukanej funkcji $u(M_0, t_0)$ daje się zapisać za pomocą następującego *wzoru Kirchhoffa*

$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left\{\frac{1}{r_{MM_0}}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) + \frac{1}{cr_{MM_0}}[u_t]\frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n}\right\} dS_M + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{[f]}{r_{MM_0}} dV_M,$$

gdzie:

- r_{MM_0} jest odległością punktów M i M_0,
- $\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną normalną zewnętrzną,
- symbol $[F]$ oznacza, że wartość funkcji w nawiasach brana jest dla wartości $t = t_0 - \frac{r_{MM_0}}{c}$.