Temat 3

Metoda Fouriera dla równań hiperbolicznych

3.1 Zagadnienie brzegowo-początkowe dla struny ograniczonej

Rozważać będziemy następujące zagadnienie.

Znaleźć funkcję $u(x,t)$ *spełniającą równanie*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \text{ dla } x \in [0;l]\,,\ l > 0,\ t > 0 \tag{3.1}$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = \alpha(t)\,,\ u(l,t) = \beta(t) \text{ dla } t > 0 \tag{3.2}$$

i warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ u_t(x,0) = \psi(x) \text{ dla } x \in [0;l]\,. \tag{3.3}$$

Zakładamy, że φ jest klasy C^2, ψ, α, β są klasy C^1. Zakładamy ponadto, że spełnione są tzw. warunki zgodności, tzn. $\varphi(0) = \alpha(0)$, $\varphi(l) = \beta(0)$, $\psi(0) = \alpha'(0)$, $\psi(l) = \beta'(0)$.

Zagadnienie (3.1)-(3.3) rozwiążemy w kilku etapach, stosując tzw. *metodę Fouriera* zwaną także *metodą separacji zmiennych*.

3.1.1 Drgania swobodne struny zamocowanej

Załóżmy, że struna jest zamocowana w punktach końcowych, tzn. spełnione są jednorodne warunki brzegowe postaci

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \text{ dla } t > 0, \text{ tzn. } \alpha \equiv 0 \text{ i } \beta \equiv 0 \tag{3.4}$$

oraz $f \equiv 0$ (brak siły zewnętrznej wymuszającej ruch).

Najpierw rozwiążemy pewne zagadnienie pomocnicze.

Znaleźć rozwiązanie równania (3.1) nie równe tożsamościowo zeru, spełniające warunki brzegowe (3.4) i przedstawialne w postaci $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, *gdzie funkcje* X i T *zależą tylko od jednej zmiennej.*

Podstawiając $u(x,t) = X(x)T(t)$ do równania (3.1), gdzie $f \equiv 0$, otrzymujemy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{3.5}$$

Ponieważ równość (3.5) zachodzić musi dla wszystkich x i t z rozważanego zakresu, więc obie strony tej równości muszą być stałe. Oznaczając tę stałą przez $-\lambda$ dostajemy równość

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

która prowadzi do układu równań

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{3.6}$$

$$T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0 \tag{3.7}$$

Z warunków brzegowych (3.4) wynika, że $X(0) = X(l) = 0$ (w przeciwnym razie $T(t) \equiv 0$ i $u \equiv 0$).

Dla funkcji $X(x)$ otrzymaliśmy tzw. *zagadnienie Sturma-Liouville'a* polegające na wyznaczeniu takich wartości λ, zwanych *wartościami własnymi*, przy których istnieją niezerowe rozwiązania równania (3.6), zwane funkcjami własnymi, spełniające warunki $X(0) = X(l) = 0$.

W celu wyznaczenia wartości własnych zagadnienia należy rozważyć trzy następujące przypadki.

1° $\lambda < 0$. Wówczas rozwiązaniem równania (3.6) jest funkcja postaci $X(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$. Z warunków $X(0) = X(l) = 0$ wynika, że $C_1 = C_2 = 0$, zatem $X(x) \equiv 0$ i $u \equiv 0$.

2° $\lambda = 0$. Wówczas $X(x) = ax + b$ i warunki $X(0) = X(l) = 0$ znów implikują, że $a = b = 0$, zatem $X(x) \equiv 0$ i $u \equiv 0$.

3° $\lambda > 0$. Teraz $X(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda}$ i dla

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.8}$$

istnieją niezerowe funkcje

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x \tag{3.9}$$

będące rozwiązaniami równania (3.6) z warunkami $X(0) = X(l) = 0$. Liczby λ_n są wartościami własnymi rozważanego zagadnienia.

Z równania (3.7) dla $\lambda = \lambda_n$ otrzymujemy, że

$$T_n = A_n \cos\frac{\pi nc}{l}t + B_n \sin\frac{\pi nc}{l}t. \tag{3.10}$$

W takim razie rozwiązaniem zagadnienia pomocniczego (3.1), (3.4) są funkcje

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{\pi nc}{l}t + B_n \sin\frac{\pi nc}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{3.11}$$

Aby skonstruować rozwiązanie spełniające także zadane warunki początkowe (3.3) tworzymy szereg

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(A_n\cos\frac{\pi nc}{l}t+B_n\sin\frac{\pi nc}{l}t\Big)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.12}$$

którego współczynniki, zgodnie z teorią szeregów Fouriera, określone są wzorami

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{\pi ns}{l}ds,\quad B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{\pi ns}{l}ds. \tag{3.13}$$

T w i e r d z e n i e

Jeżeli φ jest klasy C^2, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, ψ jest klasy C^1, $\psi(0)=\psi(l)=0$, to szereg (3.12) ze współczynnikami określonymi wzorami (3.13) jest rozwiązaniem zagadnienia (3.1) dla $f\equiv 0$, z warunkami (3.3)-(3.4).

■

P r z y k ł a d 1

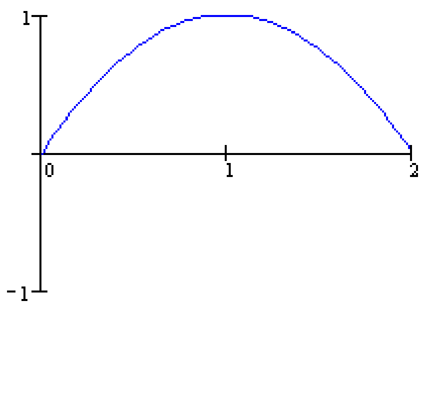
Rozwiązać omówione powyżej zagadnienie dla $l=2$, $c=1$, $\varphi(x)=x(2-x)$, $\psi(x)=0$.
Ze wzorów (3.13) wynika, że

$$A_n=\frac{16}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right],\ B_n=0,$$

tak więc rozwiązanie określone jest wzorem

$$u(x,t)=\frac{16}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^3}\sin\pi\frac{nx}{2}\cos\pi\frac{nt}{2}.$$

Funkcja $u(x,t)$ jest funkcją okresową w czasie, o okresie 4. Poniższy rysunek przedstawia kształt początkowy struny.



Struna wyprostowuje się w chwilach $t=1,3,5,...$

P r z y k ł a d 2

Rozwiązać omówione powyżej zagadnienie dla $l=2$, $c=1$, $\varphi(x)=x^2(2-x)$, $\psi(x)=0$.

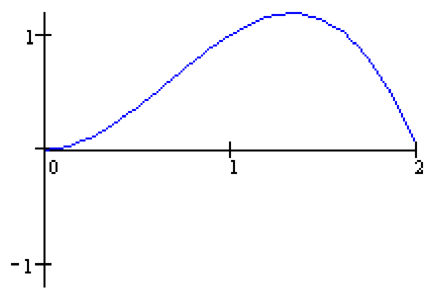
Z podanych wzorów wynika, że

$$A_n = \frac{32}{n^3\pi^3}\left[2(-1)^{n+1}-1\right],\ B_n = 0$$

tak więc rozwiązanie określone jest wzorem

$$u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[2(-1)^{n+1}-1\right]}{n^3}\sin\pi\frac{nx}{2}\cos\pi\frac{nt}{2}.$$

Funkcja $u(x,t)$ jest funkcją okresową w czasie, o okresie 4. Poniższy rysunek przedstawia kształt początkowy struny.



3.1.2 Drgania wymuszone struny zamocowanej

Rozważmy teraz zagadnienie (3.1), (3.3), (3.4) polegające na wyznaczeniu funkcji $u(x,t)$ spełniającej równanie (3.1), z dowolnymi warunkami początkowymi i jednorodnymi warunkami brzegowymi. Rozwiązanie tego zagadnienia może być zapisane w postaci sumy dwóch funkcji, z których jedna jest rozwiązaniem równania jednorodnego ($f \equiv 0$) z dowolnymi warunkami początkowymi (zagadnienie to zostało omówione w poprzednim punkcie), zaś druga funkcja jest rozwiązaniem równania niejednorodnego ($f \not\equiv 0$), ale z jednorodnymi warunkami początkowymi ($\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$) i jednorodnymi warunkami brzegowymi.

Wystarczy zatem wyznaczyć funkcję u spełniającą równanie

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \text{ dla } x \in [0;l],\ l > 0,\ t > 0 \tag{3.14}$$

z warunkami

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 \text{ dla } x \in [0;l], \tag{3.15}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \text{ dla } t > 0. \tag{3.16}$$

W tym celu załóżmy, że funkcja dana $f(x,t)$ dla $x \in [0;l]$ może być zapisana w postaci sinusowego szeregu Fouriera względem zmiennej x

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.17}$$

gdzie

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Rozwiązania zagadnienia (3.14)-(3.16) poszukujemy w postaci

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.18}$$

gdzie $T_n(t)$ są niewiadomymi funkcjami. Zakładając, że dozwolone jest różniczkowanie szeregu (3.18) wyraz po wyrazie, z równania (3.14) i przedstawienia (3.17) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)\right)\sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{+\infty} c^2 f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

a zatem

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = c^2 f_n(t), \text{ gdzie } \omega_n = \frac{\pi n c}{l}. \tag{3.19}$$

Z warunków (3.15) wynika ponadto, że

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots. \tag{3.20}$$

Rozwiązanie zagadnienia (3.19)-(3.20) można przedstawić w postaci

$$T_n(t) = \frac{2c}{\pi n}\int_0^t\left[\int_0^l f(s,r)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds\right]\sin\omega_n(t-r)\,dr \text{ dla } n = 1, 2, \ldots. \tag{3.21}$$

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja f jest klasy C^2 oraz $f(0,t) = f(l,t) = 0$ dla każdego $t \geq 0$, to szereg (3.18) ze współczynnikami określonymi wzorami (3.21) jest rozwiązaniem zagadnienia (3.14)-(3.16).

■

3.1.3 Przypadek ogólny

Rozważmy teraz ogólne zagadnienie (3.1)-(3.3). W celu rozwiązania tego zagadnienia wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$w(x,t) = \alpha(t) + [\beta(t) - \alpha(t)]\frac{x}{l} \tag{3.22}$$

i poszukujemy rozwiązania zagadnienia w postaci $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$.

Ponieważ ze wzoru (3.22) wynika, że $w(0,t) = \alpha(t)$ i $w(l,t) = \beta(t)$, więc $v(0,t) = v(l,t) = 0$, tzn. funkcja $v(x,t)$ jest rozwiązaniem pewnego zagadnienia postaci (3.1), (3.3), (3.4) z jednorodnymi warunkami brzegowymi. Zagadnienie wyznaczenia takiej funkcji $v(x,t)$ zostało omówione w poprzednim punkcie.

3.2 Równanie drgań membrany swobodnej

Rozważmy jednorodne równanie drgań płaskiej membrany

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \text{ gdzie } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3.23}$$

rozważane dla $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Załóżmy, że spełnione są warunki początkowe

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \; u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad \text{dla } (x, y) \in D \tag{3.24}$$

oraz, że φ jest klasy C^2, ψ jest klasy C^1.

3.2.1 Membrana prostokątna

Załóżmy teraz, że D jest prostokątem, $D = (0; A) \times (0; B)$ oraz, że membrana jest zamocowana na brzegu, tzn.

$$u(0, y, t) = u(A, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, B, t) = 0 \quad \text{dla } t \geq 0. \tag{3.25}$$

W celu rozwiązania tego zagadnienia postępujemy analogicznie jak w przypadku drgań swobodnych struny zamocowanej. Stosując metodę separacji zmiennych w postaci

$$u(x, y, t) = X(x)\, Y(y)\, T(t),$$

otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie zagadnienia (3.23)-(3.25) w postaci sumy szeregu podwójnego

$$u(x, y, t) = \sum_{k,n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k}{A}x \sin\frac{\pi n}{B}y \left(a_{k,n}\cos\omega_{k,n}t + b_{k,n}\sin\omega_{k,n}t\right), \tag{3.26}$$

gdzie

$$\omega_{k,n} = \pi\sqrt{\frac{k^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2}} \quad \text{dla } k, n = 1, 2, \ldots,$$

o współczynnikach $a_{k,n}$ i $b_{k,n}$ określonych wzorami

$$a_{k,n} = \frac{4}{AB}\int_0^A dx \int_0^B \varphi(x, y) \sin\frac{\pi k}{A}x \sin\frac{\pi n}{B}y dy, \tag{3.27}$$

$$b_{k,n} = \frac{4}{AB\omega_{k,n}c}\int_0^A dx \int_0^B \psi(x, y) \sin\frac{\pi k}{A}x \sin\frac{\pi n}{B}y dy. \tag{3.28}$$

P r z y k ł a d
Rozwiązać zagadnienie drgań membrany prostokątnej dla $A = B = 1$, $c = 1$, $\varphi(x, y) = (x - x^2)(y - y^2)$, $\psi(x, y) = 0$.

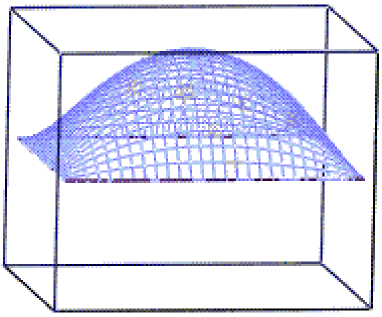
Zgodnie ze wzorami (3.27), (3.28), całkując przez części wyznaczamy współczynniki $a_{k,n}$ i $b_{k,n}$

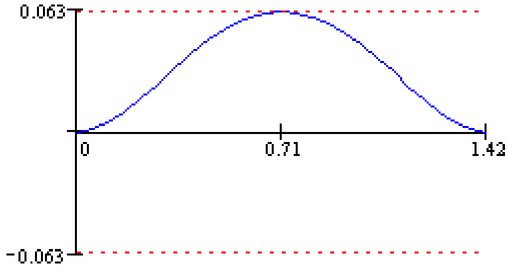
$$a_{k,n} = 16\frac{\left(1 + (-1)^{k+1}\right)\left(1 + (-1)^{n+1}\right)}{k^3 n^3 \pi^6}, \quad b_{k,n} = 0,$$

a zatem rozwiązanie zagadnienia jest postaci

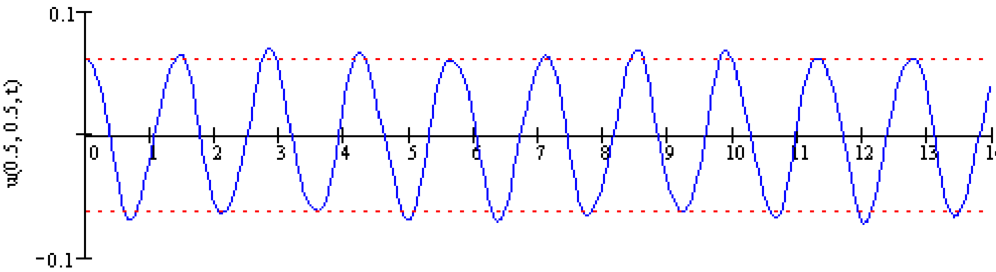
$$u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^6}\sum_{k,n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{k^3}\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^3} \sin k\pi x \sin n\pi y \cos\left(t\pi\sqrt{k^2 + n^2}\right).$$

Poniższy rysunek przedstawia wygląd membrany i kształt jej przekroju wzdłuż przekątnej kwadratu D w chwili $t = 0$.





Kolejny rysunek przedstawia drgania punktu środkowego ($x = y = 0,5$) membrany jako funkcję zmiennej t.



3.2.2 Membrana kołowa

Załóżmy teraz, że D jest kołem, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}$ oraz, że membrana jest zamocowana na brzegu, tzn.

$$u(x, y, t) = 0 \text{ dla } x^2 + y^2 = a^2, \text{ dla } t \geq 0. \tag{3.29}$$

Załóżmy, że funkcje φ i ψ opisujące warunki początkowe (3.24) spełniają zależność

$$\varphi(x, y) = \varphi(r), \ \psi(x, y) = \psi(r), \text{ gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{3.30}$$

tzn. warunki te są kołowo symetryczne. O funkcjach danych załóżmy, że φ jest klasy C^2, pochodna φ''' istnieje i jest przedziałami ciągła, $\varphi(a) = 0$, ψ jest klasy C^1, pochodna ψ'' istnieje i jest przedziałami ciągła, $\psi(a) = 0$.

Z symetrii równania i warunków wynika, że rozwiązanie u może być poszukiwane w postaci $u = u(r, t)$. Przechodząc do współrzędnych biegunowych (r, θ), przekształcamy wyjściowe równanie do postaci (przyjmujemy, że u nie zależy od θ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{3.31}$$

Stosując metodę Fouriera (separacji zmiennych) dla $u(r,t) = R(r)T(t)$ otrzymujemy dwa równania

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = -\lambda = const.$$

Z warunków brzegowych wynika, że stały parametr może przyjmować wartości

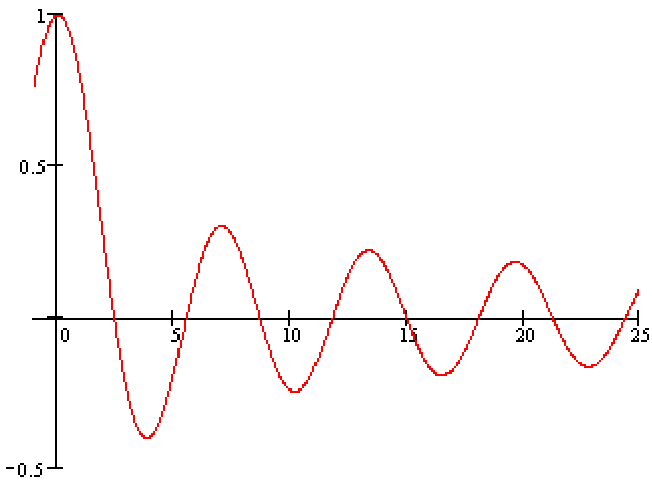
$$\lambda = \lambda_n = \frac{x_n^2}{a^2}, \text{ dla } n = 1, 2, ...$$

gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji Bessela J_0.

Funkcje Bessela J_k określone są wzorem

$$J_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k},$$

a ich zera (x_n) są stabelaryzowane. Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji J_0.



W takim razie funkcja

$$u_n(x,t) = J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right)\left[A_n \cos\left(x_n\frac{ct}{a}\right) + B_n \sin\left(x_n\frac{ct}{a}\right)\right] \quad \text{dla } n = 1, 2, ... \tag{3.32}$$

i dowolnych stałych A_n, B_n jest rozwiązaniem rozważanego równania (3.31) spełniającym jednocześnie warunek brzegowy (3.29).

Pełnym rozwiązaniem zagadnienia, spełniającym także warunki początkowe (3.30), jest funkcja $u(r,t)$ określona jako suma szeregu

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right)\left[A_n \cos\left(x_n\frac{ct}{a}\right) + B_n \sin\left(x_n\frac{ct}{a}\right)\right] \tag{3.33}$$

gdzie stałe A_n i B_n wyznaczone są za pomocą wzorów

$$A_n = \frac{2}{a^2J_1^2(x_n)}\int_0^a r\varphi(r)J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right)dr, \quad B_n = \frac{2}{ax_ncJ_1^2(x_n)}\int_0^a r\psi(r)J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right)dr \tag{3.34}$$

dla $n = 1, 2, ...,$ $J_1(x) = -J_0'(x)$.

P r z y k ł a d
Rozwiązać zagadnienie drgań membrany kołowej dla $a = 1$, $\varphi(r) = 1 - r^2$, $\psi(r) = 0$.

Z danych zadania wynika, że

$$B_n = 0, \qquad A_n = \frac{2}{J_1^2(x_n)} \int_0^1 r(1 - r^2) J_0(x_n r) dr \quad \text{dla } n = 1, 2, ...$$

Korzystając z własności funkcji Bessela

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$

i wzoru rekurencyjnego

$$J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} J_k(x)$$

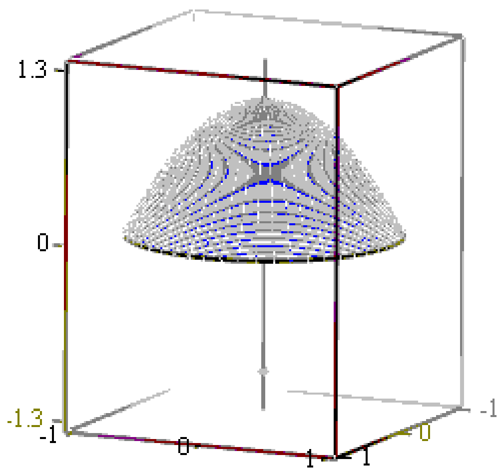
oraz stosując wzór na całkowanie przez części otrzymujemy ostatecznie

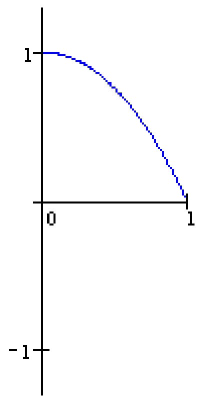
$$A_n = \frac{4 J_2(x_n)}{x_n^2 J_1^2(x_n)} = \frac{8}{x_n^3 J_1(x_n)},$$

a zatem rozwiązanie zagadnienia wyraża się wzorem

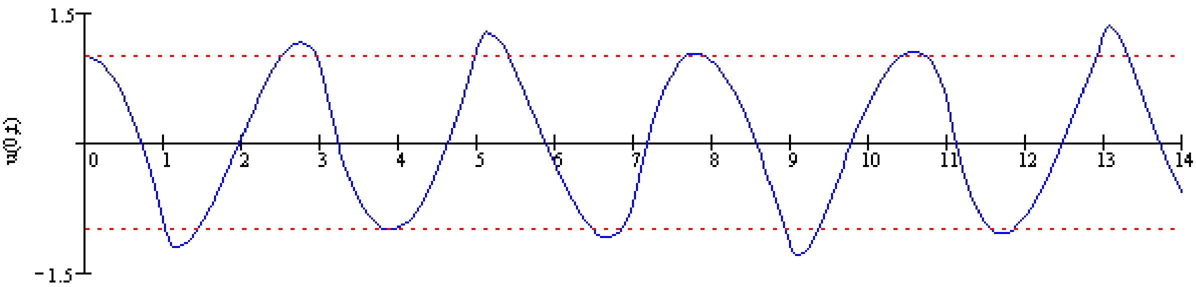
$$u(r, t) = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^3 J_1(x_n)} J_0(x_n r) \cos(x_n c t).$$

Poniższy rysunek przedstawia wygląd memebrany i kształt jej przekroju osiowego w chwili $t = 0$.





Kolejny rysunek przedstawia drgania punktu położonego na osi symetrii membrany jako funkcję zmiennej t.



3.2.3 Membrana nieograniczona

Załóżmy teraz, że rozważamy równanie drgań membrany (3.23) dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Oznacza to, że dane są tylko warunki początkowe opisujące początkowy kształt membrany i prędkość początkową drgań (3.24), nie ma zaś warunków brzegowych.

Następujące twierdzenie określa warunki dostateczne dla istnienia rozwiązania i podaje jego postać (tzw. *wzór Poissona*).

T w i e r d z e n i e
Jeżeli funkcje φ i ψ są odpowiednio klasy C^3 i C^2, to funkcja u postaci

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c} \iint\limits_{K_{ct}} \frac{\psi(p,q)dpdq}{\sqrt{c^2t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c} \iint\limits_{K_{ct}} \frac{\varphi(p,q)dpdq}{\sqrt{c^2t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\right]$$

gdzie K_{ct} jest kołem o środku w punkcie (x, y) i promieniu ct, jest rozwiązaniem rozważanego zagadnienia.

■

P r z y k ł a d
Rozwiązać zagadnienie drgań membrany nieograniczonej dla danych:

$$c = 1, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \quad \psi(x,y) = 0.$$

Stosując we wzorze Poissona zamianę zmiennych w całce podwójnej

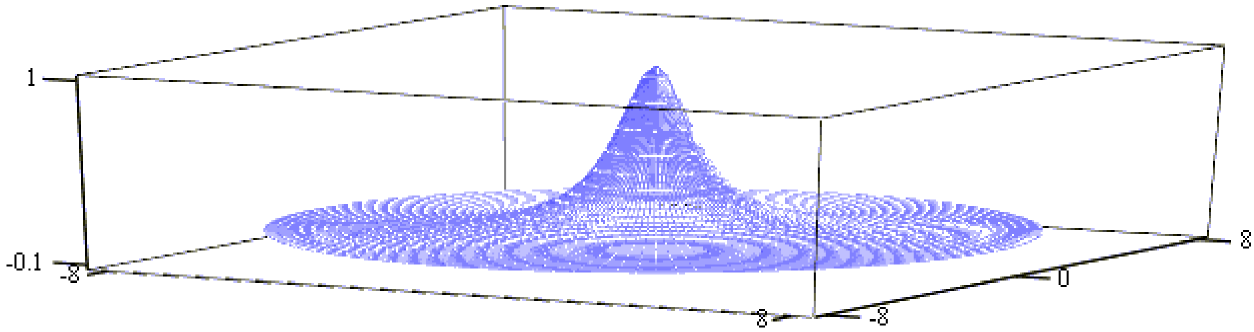
$$p = x + r\cos\alpha\ , \quad q = y + r\sin\alpha$$

otrzymujemy wzór na funkcję u w postaci

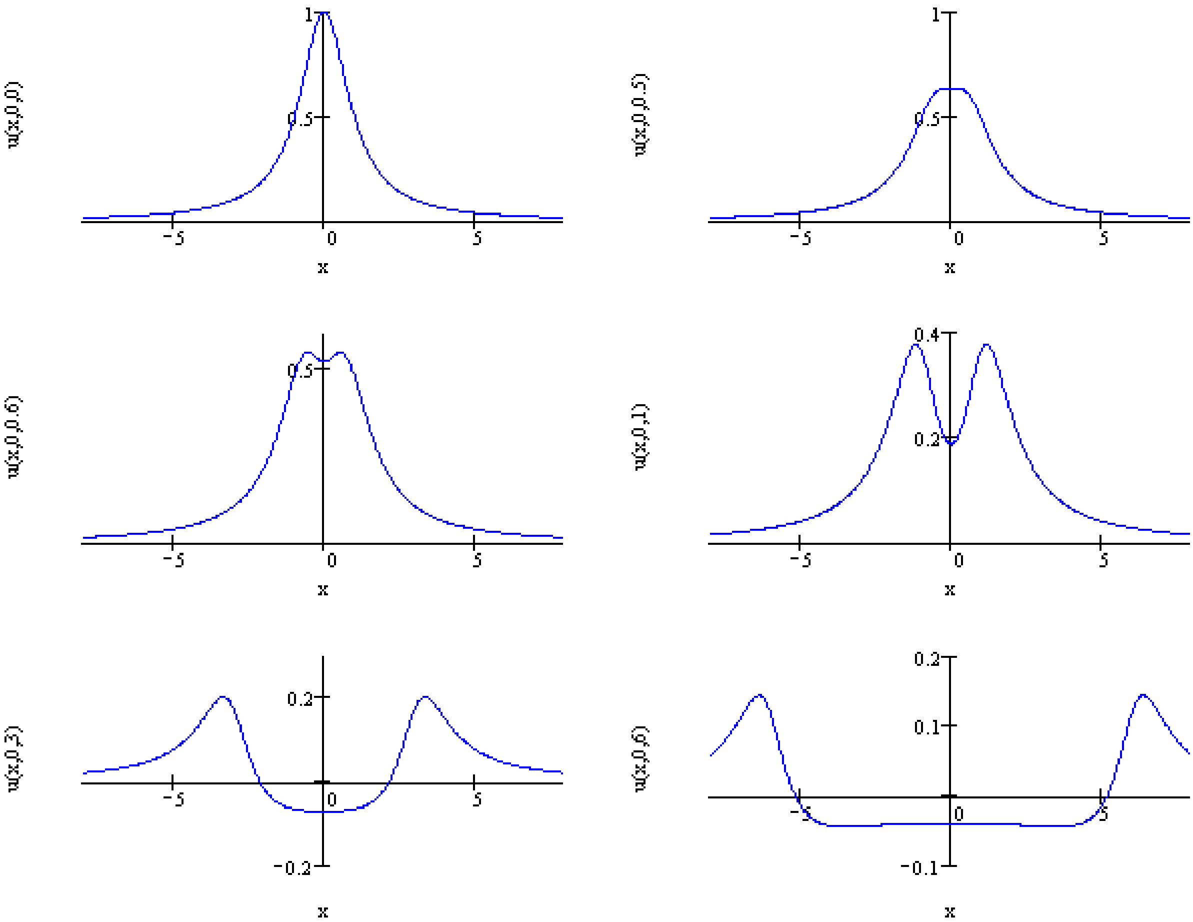
$$u(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^t \varphi(x+r\cos\alpha, y+r\sin\alpha)\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\alpha\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^t \frac{1}{1+x^2+y^2+r^2+2xr\cos\alpha+2yr\sin\alpha}\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\alpha\right]$$

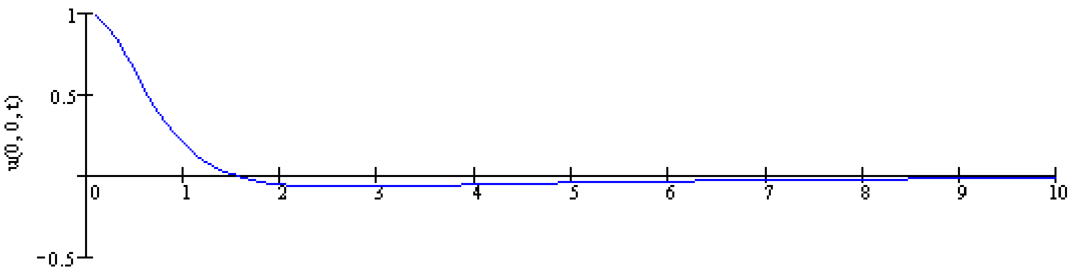
Poniższy rysunek przedstawia wygląd membrany w chwili $t = 0$.



Na następnym rysunku widoczne są kształty przekrojów osiowych membrany dla $t = 0$, $t = 0,5$, $t = 0,6$, $t = 1$, $t = 3$, $t = 6$.



Kolejny rysunek przedstawia drgania punktu położonego na osi symetrii membrany jako funkcję zmiennej t.



3.3 Drgania poprzeczne belki

Metoda separacji zmiennych może być stosowana do rozwiązywania zagadnień granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych rzędu wyższego niż drugi. Przykładem takiego zagadnienia jest zagadnienie drgającej belki opisane równaniem rzędu czwartego

$$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0, \ \text{ dla } x \in (0; l)\,, \, t > 0 \tag{3.35}$$

z warunkami początkowymi

$$u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,,\, u_t\,(x, 0) = \psi\,(x) \tag{3.36}$$

opisującymi kształt początkowy belki i początkową prędkość drgań oraz warunkami brzegowymi postaci

$$u\,(0, t) = u\,(l, t) = u_{xx}\,(0, t) = u_{xx}\,(l, t) = 0. \tag{3.37}$$

Podobnie jak w przypadku struny, poszukujemy niezerowych rozwiązań równania (3.35) spełniających jednocześnie warunki brzegowe (3.37), w postaci $u\,(x, t) = X\,(x)\,T\,(t)$. Prowadzi to do problemu wyznaczenia wartości własnych λ, dla których istnieją niezerowe funkcje $X\,(x)$ spełniające równanie

$$\frac{X^{(4)}\,(x)}{X\,(x)} = -\frac{T''\,(t)}{c^2 T\,(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

z warunkami

$$X\,(0) = X\,(l) = X''\,(0) = X''\,(l) = 0. \tag{3.39}$$

Z rozważań analogicznych do przypadku omówionego dla struny jednowymiarowej wynika, że jedynymi liczbami λ o tej własności są liczby

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

którym odpowiadają funkcje

$$X_n\,(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \ \ T_n\,(t) = A_n \sin\left[c\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right] + B_n \cos\left[c\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right].$$

Rozwiązanie zagadnienia (3.35)-(3.37) możemy zatem zapisać w postaci

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}X_n(x)\,T_n(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{A_n\sin\left[c\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t\right]+B_n\cos\left[c\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t\right]\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.40}$$

gdzie współczynniki A_n i B_n szeregu (3.40) wyznaczamy z warunków początkowych

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad \psi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nc\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

skąd wynika ostatecznie, że

$$A_n=\frac{2l}{cn^2\pi^2}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad \text{dla } n=1,2,\ldots.$$

3.4 Zadania

1. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=b\sinh x$$
przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych
$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0.$$

2. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=bx(x-l)$$
przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych
$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0.$$

3. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=t^2x(x-l)$$
przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych
$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0.$$

4. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2h\frac{\partial u}{\partial t}-b^2u=0$$
przy jednorodnych warunkach początkowych oraz przy warunkach brzegowych
$$u(0,t)=A,\qquad u(l,t)=0.$$

5. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x.$$

6. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = \sin\frac{5\pi}{2l}x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x.$$

7. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x + \sin\frac{3\pi}{2l}x.$$

8. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1.$$

9. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \exp(-t) \sin \frac{\pi}{l} x$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$

i jednorodnych warunkach początkowych

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

10. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Ax \exp(-t)$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$

i jednorodnych warunkach początkowych

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

11. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \sin t$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

i jednorodnych warunkach początkowych

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

12. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0,t) = t^2, \qquad u(\pi,t) = t^3$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = \sin x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

13. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0,t) = \exp(-t), \qquad u(\pi,t) = t$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = \sin x \cos x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1.$$

14. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0,t) = t, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 1$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = \sin \frac{1}{2}x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1.$$

15. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin 2t, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \frac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t$$

i warunkach początkowych

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\cos \frac{2x}{a}.$$

16. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$

i warunku początkowym

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 < x \le \frac{1}{2}l \\ l - x & \text{dla} \quad \frac{1}{2}l < x < l. \end{cases}$$

17. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach brzegowych
$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$
i warunku początkowym
$$u(x,0) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$

18. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach brzegowych
$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$
i warunku początkowym
$$u(x,0) = Ax.$$

19. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach brzegowych
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$
i warunku początkowym
$$u(x,0) = A(l-x).$$

20. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach brzegowych
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$
i warunku początkowym
$$u(x,0) = U = Const.$$

21. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach brzegowych
$$u(0,t) = T, \qquad u(l,t) = U$$
i warunku początkowym
$$u(x,0) = 0.$$