

Równania różniczkowe

Krzysztof Frączek

Version 1.0b, 2003/07/07

Spis treści

1	Równania różniczkowe	3
1.1	Przykłady	3
1.2	Co to jest równanie różniczkowe zwyczajne?	6
1.3	Interpretacja geometryczna	8
1.4	Równanie o rozdzielonych zmiennych	8
2	Istnienie i jednoznaczność rozwiązań	10
2.1	Istnienie i jednoznaczność	10
2.2	Rozwiązania globalne	17
3	Schematy numeryczne	25
3.1	Definicje i podstawowe własności	25
3.2	Schematy Rungego-Kutty	31
3.3	Praktyczne zastosowania schematów numerycznych	33
4	Układy równań liniowych	37
4.1	Równania liniowe o stałych współczynnikach	43
4.2	Równania liniowe wyższych rzędów	49
4.3	Liniowe równania różnicowe	52
4.4	Liniowe schematy wielokrokowe	53
5	Zależności rozwiązań od warunków początkowych	67
6	Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu	75
6.1	Podstawowe definicje i własności	75
6.2	Rozmaitości (przypomnienie)	76
6.3	Rozwiązywanie równań liniowych	77
6.4	Równania quasi-liniowe	84
7	Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu	90
7.1	Równanie struny	91
8	Problem Dirichleta	99
8.1	Metoda siatek	103

1 Równania różniczkowe

1.1 Przykłady

Przykład 1.1.1. Do banku wkładamy w chwili t_0 pewien kapitał początkowy N_0 . Bank oferuje nam oprocentowanie $k(t)$ (w stosunku rocznym) - zmienne w czasie. Jaka będzie wartość wkładu w chwili t ? Zależy to oczywiście od tego jak często bank kapitalizuje (dolicza odsetki) nasz wkład. Jeśli okres kapitalizacji wynosi h , to:

$$N(t+h) = N(t) + h \cdot k(t)N(t) \quad (1.1.1)$$

Co możemy powiedzieć na temat $N(t)$ jeśli kapitalizacja przebiega w sposób ciągły, czyli $h \rightarrow 0$?

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = k(t)N(t) \quad (1.1.2)$$

Przechodząc z $h \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = k \cdot N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Przykład 1.1.2. (Druga zasada dynamiki)

Obserwujemy ruch pewnej cząstki w \mathbb{R}^3 . Wiemy że w chwili t_0 znajduje się w $x_0 \in \mathbb{R}^3$ i porusza się z prędkością $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$. Załóżmy, że na cząstkę znajdującą się w $x \in \mathbb{R}^3$ i poruszającą się z prędkością $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ w chwili t działa siła $F(t, x, v) \in \mathbb{R}^3$. Wówczas ruch cząstki $x(t) \in \mathbb{R}^3$ opisuje równanie Newtona:

$$\begin{cases} m \cdot x''(t) & = F(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \\ x'(t_0) & = v_0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ m \cdot x''_i(t) &= F(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t)) \\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Powyższe równanie można sprowadzić do, w pewnym sensie, prostszego rów-

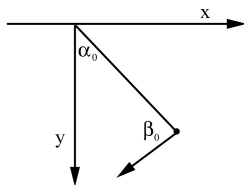
nia. Oznaczmy $v(t) = x'(t)$. Wówczas:

$$\begin{cases} m \cdot v'(t) = m \cdot x''(t) = F(t, x(t), x'(t)) = F(t, x(t), v(t)) \\ x'(t) = v(t) \\ x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

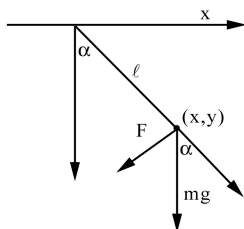
Wówczas poszukiwana funkcja jest postaci $t \mapsto (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Przykład 1.1.3. (Wahadło matematyczne)

Wahadło długości l , które posiada ciężarek o masie m , wprowadzono w ruch w chwili t_0 pod kątem α_0 z prędkością kątową β_0 . Jakie będzie położenie wahadła oraz jego prędkość kątowa w chwili t ?



Na wahadło działają dwie siły: siła ciężkości $\downarrow mg$ oraz siła z jaką sznurek trzyma ciężarek. Niech $(x, y) = (l \sin \alpha, l \cos \alpha)$.



Zatem siła działająca na wahadło w położeniu $(l \sin \alpha, l \cos \alpha)$ wynosi $F(l \sin \alpha, l \cos \alpha) = mg \sin \alpha (-\cos \alpha, \sin \alpha)$. Niech $x(t) = l(\sin \alpha(t), \cos \alpha(t))$ oznacza położenie wahadła w chwili t , czyli $\alpha(t)$ jest kątem jego wychylenia. Druga zasada dynamiki mówi:

$$x''(t) = F(x(t)) \quad (1.1.6)$$

Zatem

$$\begin{aligned} x'(t) &= l(\cos \alpha(t) \cdot \alpha'(t), -\sin \alpha(t) \cdot \alpha'(t)) \\ x''(t) &= l(-\sin \alpha(t)(\alpha'(t))^2 + \cos \alpha(t) \cdot \alpha''(t), -\cos \alpha(t)(\alpha'(t))^2 - \sin \alpha(t) \cdot \alpha''(t)). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 ml(-\sin \alpha(t)(\alpha'(t))^2 + \cos \alpha(t) \cdot \alpha''(t)) &= -mg \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) \quad / \cos \alpha(t) \\
 ml(-\cos \alpha(t)(\alpha'(t))^2 - \sin \alpha(t) \cdot \alpha''(t)) &= mg \sin^2 \alpha(t) \quad / -\sin \alpha(t) \\
 l\alpha''(t) &= -g \sin \alpha(t).
 \end{aligned}
 \tag{1.1.8}$$

Jeśli $\beta(t) = \alpha'(t)$, to

$$\begin{cases}
 \alpha'(t) &= \beta(t) \\
 \beta'(t) &= -\frac{g}{l} \sin \alpha(t) \\
 \alpha(t_0) &= \alpha_0 \\
 \beta(t_0) &= \beta_0.
 \end{cases}
 \tag{1.1.9}$$

Przykład 1.1.4. (Rozwój populacji)

Niech $N(t)$ będzie wielkością populacji (np. ilość królików, bakterii itp.) na jakimś zamkniętym obszarze. Wiemy, że w chwili t_0 wielkość populacji wynosi N_0 . Jakie prawa rządzą rozwojem populacji? Przyrost populacji $N'(t)$ jest proporcjonalny do jej wielkości, czyli

$$N'(t) = k(N(t)) \cdot N(t), \tag{1.1.10}$$

gdzie $k(N)$ jest współczynnikiem wzrostu populacji gdy jej wielkość wynosi N . Ponieważ ilość pokarmu jest stała, więc funkcja k jest malejąca. Dla uproszczenia możemy przyjąć $k(N) = a - b \cdot N$. Zatem dynamikę populacji opisuje równanie:

$$\begin{cases}
 N'(t) = (a - b \cdot N(t))N(t) \\
 N(t_0) = N_0
 \end{cases}
 \tag{1.1.11}$$

Przykład 1.1.5. (Współistnienie gatunków)

Na danym terenie żyją dwa gatunki: drapieżniki i ofiary. Niech $x(t)$ oznacza liczbę drapieżników, $y(t)$ liczbę ofiar w chwili t .

$$\begin{cases}
 x'(t) = (b \cdot y(t) - a)x(t) \\
 y'(t) = (e - d \cdot x(t))y(t)
 \end{cases}
 \tag{1.1.12}$$

(Równanie Volterra-Lotka)

1.2 Co to jest równanie różniczkowe zwyczajne?

Definicja 1.2.1. Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci:

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad (1.2.1)$$

przy czym szukaną funkcją jest funkcja $x : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^d$, która spełnia warunek (1.2.1), gdzie $F : [t_0, t_0 + \alpha] \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją przynajmniej ciągłą.

Jeśli $k = d$ oraz F można rozwikłać dla ostatniej współrzędnej to równanie (1.2.1) ma postać

$$x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad (1.2.2)$$

gdzie $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_n \rightarrow \mathbb{R}^d$

Równanie (1.2.2) może posiadać wiele rozwiązań. Aby ograniczyć się do jednego rozwiązania równanie (1.2.2) rozważa się wraz z warunkami początkowymi postaci:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Stwierdzenie 1.2.1. *Dowolne równanie postaci (1.2.2) można sprowadzić do równania pierwszego rzędu (czyli $n = 1$).*

Dowód. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x'(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x^{(n-1)}(t) \\ \bar{x}(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^{d \cdot n}. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x'(t) = x_2(t) \\x_2'(t) &= x''(t) = x_3(t) \\&\vdots \\x_{n-1}'(t) &= x^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\x_n'(t) &= x^{(n)}(t) = f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = f(t, \bar{x}(t)).\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$\bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x}(t)) \tag{1.2.4}$$

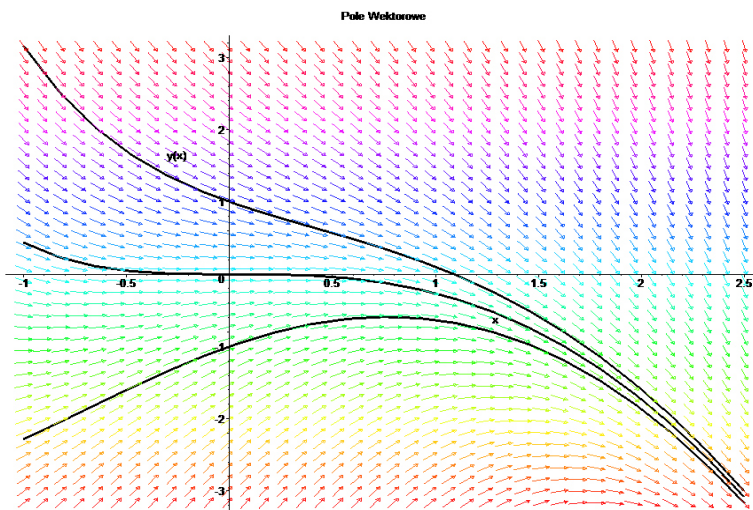
gdzie $\bar{f} : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^{d_n} \rightarrow \mathbb{R}^{d_n}$, $\bar{f}_i(t, x) = x_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$ oraz $\bar{f}_n(t, x) = f(t, x)$. Natomiast warunek początkowy wygląda następująco

$$\bar{x}(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) = (x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Jeśli teraz rozwiążemy równanie (1.2.4) z powyższym warunkiem początkowym, to $y(t) = x_1(t)$ jest rozwiązaniem równania (1.2.2) z warunkiem początkowym (1.2.3). ■

1.3 Interpretacja geometryczna

Rozważmy równanie różniczkowe postaci $x'(t) = f(x(t))$, gdzie $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Równanie takiej postaci nazywamy autonomicznym (niezależnym od czasu t). Wówczas na funkcję $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ możemy patrzeć jak na pole wektorowe (pole wektorów prędkości). Rozwiązanie $x(t)$ możemy wówczas traktować jako opis ruchu cząstki w \mathbb{R}^d , którego wektor prędkości jest wyznaczony przez wektor pola f umieszczony w punkcie w którym znajduje się cząstka.



Jeśli równanie różniczkowe jest postaci $x'(t) = f(t, x(t))$, określa się je mianem nieautonomicznego (zależnego od czasu). W takim wypadku pole wektorowe f zmienia się w czasie, co należy uwzględnić w ruchu cząstki.

1.4 Równanie o rozdzielonych zmiennych

Definicja 1.4.1. Równanie postaci

$$x'(t) = h(t)q(x(t)), \quad (1.4.1)$$

gdzie $h : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi na pewnych odcinkach K i L nazywamy równaniem o rozdzielonych zmiennych.

Twierdzenie 1.4.1. (Metoda rozdzielonych zmiennych)

Niech $g(x) \neq 0$ dla $x \in L$. Oznaczmy przez H oraz G funkcje pierwotne

odpowiednio funkcji h oraz $\frac{1}{g}$. Niech $u : K \rightarrow L$ będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas u jest rozwiązaniem równania (1.4.1) wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\exists_{C \in \mathbb{R}} G(u(t)) = H(t) + C. \quad (1.4.2)$$

Dowód. (\Rightarrow) Zauważmy, że jeśli $u'(t) = h(t)g(u(t))$ dla $t \in K$, to

$$\begin{aligned} \frac{u'(t)}{g(u(t))} &= h(t) \\ \Downarrow \\ G'(u(t))u'(t) &= H'(t) \\ \Downarrow \\ (G \circ u)'(t) &= H'(t) \\ \Downarrow \\ G(u(t)) &= H(t) + C \end{aligned}$$

(\Leftarrow) wystarczy zróżniczkować. ■

Uwaga 1.4.1. Ponieważ $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0$, więc G jest odwracalna, stąd

$$u(t) = G^{-1}(H(t) + C) \quad (1.4.3)$$

2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

2.1 Istnienie i jednoznaczność

Niech $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($G \subset \mathbb{R}^d$ otwarty) będzie funkcją ciągłą. Rozważmy problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Kiedy istnieje rozwiązanie problemu (2.1.1) i czy jest ono jedyne?

Załóżmy że $x : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^d$ jest funkcją różniczkowalną spełniającą równanie (2.1.1). Wówczas x jest klasy C^1 oraz

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (2.1.2)$$

czyli

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2.1.3)$$

Odwrotnie, jeśli x jest funkcją ciągłą spełniającą (2.1.3), wówczas jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (2.1.1). Zatem problemy (2.1.1) i (2.1.3) są równoważne.

Lemat 2.1.1. Gronwalla

Niech $u, v : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi nieujemnymi oraz $C \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$. Jeśli:

$$v(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(\tau)v(\tau) d\tau, \quad (2.1.4)$$

to

$$v(t) \leq C \cdot e^{\int_{t_0}^t u(\tau) d\tau}. \quad (2.1.5)$$

Dowód. 1) $C > 0$. Rozważmy $w(t) = C + \int_{t_0}^t u(\tau)v(\tau) d\tau$. Wówczas $v(t) \leq w(t)$ oraz $w(t) \geq C > 0$. Ponadto $w'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)w(t)$. Stąd

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq u(t).$$

Zatem

$$\ln w(t) - \ln w(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{w'(\tau)}{w(\tau)} d\tau \leq \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

oraz

$$v(t) \leq w(t) \leq w(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t u(\tau) d\tau} = C \cdot e^{\int_{t_0}^t u(\tau) d\tau}.$$

2) $C = 0$. Wówczas

$$v(t) \leq \varepsilon + \int_{t_0}^t u(\tau) v(\tau) d\tau$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Zatem na mocy 1) otrzymujemy

$$v(t) \leq \varepsilon \cdot e^{\int_{t_0}^t u(\tau) d\tau}$$

Natomiast przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy $v(t) \leq 0$.

■

Definicja 2.1.1. Mówimy, że funkcja ciągła $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^d$, spełnia warunek Lipschitza ze względu na x ze stałą L , jeśli

$$\forall_{t \in [t_0, t_0 + \alpha]} \forall_{x, y \in G} \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (2.1.6)$$

Przykład 2.1.1. Niech $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie klasy C^1 (gdzie G jest zbiorem wypukłym) taką, że

$$\sup_{t, x} \left\| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right\| = L < +\infty \quad (2.1.7)$$

(warunek ten jest spełniany gdy $\alpha < +\infty$ oraz G jest zbiorem zwartym). Wówczas na mocy twierdzenia o wartości średniej

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \|x - y\| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(t, x + \theta(y - x)) \right\| \leq L \|x - y\| \quad (2.1.8)$$

Twierdzenie 2.1.2. *O jednoznaczności rozwiązań*

Niech $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($G \subset \mathbb{R}^d$) będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek Lipschitza ze stałą L ze względu na x . Załóżmy, że funkcje różniczkowalne $x, y : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^d$ spełniają warunki:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha] \quad (2.1.9)$$

oraz $x(t_0) = y(t_0)$. Wówczas $x(t) = y(t)$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Dowód. Niech $v(t) = \|x(t) - y(t)\|$. Wówczas

$$\begin{aligned} v(t) &= \left\| x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau - y(t_0) - \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^t Lv(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Stosując lemat Gronwalla dla $C = 0$, $u = L$ otrzymujemy $v(t) = \|x(t) - y(t)\| = 0$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Zatem $x(t) = y(t)$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. ■

Przykład 2.1.2. Rozważmy równanie

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

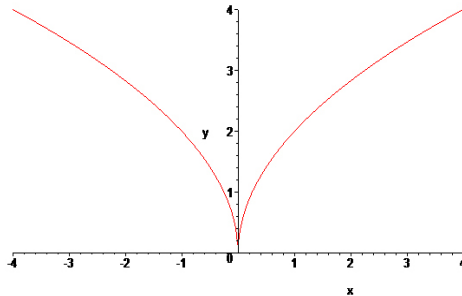
Jednym z rozwiązań jest $x_1(t) = 0$. Ponadto

$$x_2(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

jest również jego rozwiązaniem, ponieważ:

$$x_2'(t) = \begin{cases} 2t & \text{dla } t \geq 0 \\ -2t & \text{dla } t \leq 0 \end{cases} = 2\sqrt{|x_2(t)|}$$

Oczywiście $x \mapsto 2\sqrt{|x|}$ jest ciągła jednak nie Lipschitza.



Widać więc, że warunek Lipschitza jest konieczny dla jednoznaczności rozwiązań.

Twierdzenie 2.1.3. (*Picarda o istnieniu lokalnych rozwiązań*)

Niech $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times K(x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($K(x_0, b)$ jest kulą domkniętą o środku w x_0 i promieniu b) będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek Lipschitza dla x ze stałą L . Niech $\|f(t, x)\| \leq M$ dla $(t, x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times K(x_0, b)$. Wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja różniczkowalna

$$x : \left[t_0, t_0 + \min\left(\alpha, \frac{b}{M}\right) \right] \rightarrow K(x_0, b)$$

taka, że $x(t_0) = x_0$ oraz $x'(t) = f(t, x(t))$ dla $x \in [t_0, t_0 + \beta]$, gdzie $\beta = \min(\alpha, \frac{b}{M})$.

Dowód. Jednoznaczność wynika z twierdzenia 2.1.2. Wystarczy zatem udowodnić istnienie rozwiązania. W tym celu skonstruujemy ciąg $y_n : [t_0, t_0 + \beta] \rightarrow \mathbb{R}^d$ w sposób indukcyjny, który będzie przybliżał rozwiązanie równania. Ciąg $\{y_n\}$ definiujemy następująco:

$$\begin{cases} y_0(t) = x_0 \\ y_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \end{cases} \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \beta]$$

Żeby definicja miała sens musimy sprawdzić, czy $y_n(t) \in K(x_0, b)$ dla $t \in [t_0, t_0 + \beta]$.

Dowód indukcyjny:

1° Dla $n = 0$ mamy $y_0(t) = x_0 \in K(x_0, b)$.

2° Załóżmy, że $y_n \in K(x_0, b)$ dla $t \in [t_0, t_0 + \beta]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, y_n(\tau))\| d\tau \\ &\leq M(t - t_0) \leq M\beta \leq M \frac{b}{M} = b. \end{aligned}$$

Zatem $y_n(t) \in K(x_0, b)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Następnie pokażemy, że:

$$\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \frac{ML^n(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Dowód indukcyjny:

1° Dla $n = 0$ mamy

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| = \|y_1(t) - x_0\| \leq M(t - t_0) = \frac{ML^0(t - t_0)^1}{1!}.$$

2° Załóżmy, że $\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leq \frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}$ dla $t \in [t_0, t_0 + \beta]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_n(\tau))d\tau - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, y_n(\tau)) - f(\tau, y_{n-1}(\tau))\| d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)\| d\tau \leq L \int_{t_0}^t \frac{ML^{n-1}(\tau - t_0)^n}{n!} d\tau \\ &= \frac{ML^n(\tau - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_{t_0}^t = \frac{ML^n(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Rozważmy szereg funkcyjny:

$$y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)) \text{ dla } t \in [t_0, t_0 + \beta]. \quad (2.1.10)$$

Ponieważ mamy $\sup_{t \in [t_0, t_0 + \beta]} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \frac{ML^n \beta^{n+1}}{(n+1)!}$ oraz szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n \beta^{n+1}}{(n+1)!}$ jest zbieżny, więc, na podstawie kryterium Weierstrassa, szereg (2.1.10) jest zbieżny jednostajnie do funkcji ciągłej $y : [t_0, t_0 + \beta] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Ponadto

$$y \Leftarrow y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_n,$$

zatem $y_n \Rightarrow y$ (zbiega jednostajnie) oraz $y : [t_0, t_0 + \beta] \rightarrow K(x_0, b)$. Ponadto $z_n(t) = f(t, y_n(t))$ zbiega jednostajnie do $z(t) = f(t, y(t))$ na $[t_0, t_0 + \beta]$, ponieważ

$$\|z(t) - z_n(t)\| = \|f(t, y(t)) - f(t, y_n(t))\| \leq L \|y(t) - y_n(t)\|.$$

Zatem dla dowolnego $t \in [t_0, t_0 + \beta]$

$$x_0 + \int_{t_0}^t z_n(\tau)d\tau \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t z(\tau)d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau))d\tau$$

oraz

$$x_0 + \int_{t_0}^t z_n(\tau)d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_n(\tau))d\tau = y_{n+1}(t) \rightarrow y(t).$$

Stąd

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau))d\tau$$

oraz y jest ciągła na $[t_0, t_0 + \beta]$, czyli y jest klasy C^1 oraz

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ dla } t \in [t_0, t_0 + \beta] \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

■

Twierdzenie 2.1.4. (o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań lokalnych rozwiązań dla funkcji klasy C^1) Niech $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($G \subset \mathbb{R}^d$ otwarty) będzie funkcją klasy C^1 . Wówczas dla dowolnego $x_0 \in G$ istnieje $\varepsilon > 0$ oraz funkcja różniczkowalna $x : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow G$ taka, że $x(t_0) = x_0$ oraz $x'(t) = f(t, x(t))$ dla $x \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$. Ponadto, założymy, że dla pewnego $\delta > 0$ funkcje różniczkowalne $x, y : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^d$ spełniają warunki: $x'(t) = f(t, x(t)), y'(t) = f(t, y(t))$ dla $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ oraz $x(t_0) = y(t_0)$. Wówczas $x(t) = y(t)$ dla $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Dowód. 1° *Istnienie.* Ponieważ $x_0 \in G$ i G jest otwarty, więc istnieje $b > 0$ takie, że $K(x_0, b) \subset G$. Ponieważ zbiór $[t_0, t_0 + \alpha] \times K(x_0, b)$ jest zwarty

$$M := \sup_{(t,x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times K(x_0, b)} \|f(t, x)\| < +\infty,$$

$$L := \sup_{(t,x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times K(x_0, b)} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| < +\infty.$$

Zatem

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha], x, y \in K(x_0, b).$$

Stąd na podstawie tw. Picarda istnieje funkcja różniczkowalna $x : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow K(x_0, b) \subset G$ ($\varepsilon = \min(\alpha, b/M)$) taka, że

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ dla } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2° *Jednoznaczność.* Niech

$$t_0 + \delta_0 = \inf\{t \in [t_0, t_0 + \delta] : x(t) \neq y(t)\}.$$

Założmy, że $\delta_0 < \delta$. Z ciągłości x i y mamy $y_0 := x(t_0 + \delta_0) = y(t_0 + \delta_0) \in G$. Ponieważ G jest zbiorem otwartym więc istnieje $b > 0$ takie, że $K(y_0, b) \subset G$. Wówczas, podobnie jak w 1°, istnieje $L \geq 0$ takie, że

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{dla } t \in [t_0 + \delta_0, t_0 + \delta], x, y \in K(y_0, b).$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, że $x(t), y(t) \in K(y_0, b)$ dla $t \in [t_0 + \delta_0, t_0 + \delta_0 + \varepsilon]$. Wówczas $f : [t_0 + \delta_0, t_0 + \delta_0 + \varepsilon] \times K(y_0, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest funkcją Lipschitza oraz $x, y : [t_0 + \delta_0, t_0 + \delta_0 + \varepsilon] \rightarrow K(y_0, b)$ spełniają założenia Twierdzenia 2.1.2. Zatem $x(t) = y(t)$ dla $t \in [t_0 + \delta_0, t_0 + \delta_0 + \varepsilon]$. Stąd

$$t_0 + \delta_0 = \inf\{t \in [t_0, t_0 + \delta] : x(t) \neq y(t)\} \geq t_0 + \delta_0 + \varepsilon,$$

czyli $0 \geq \varepsilon$ i sprzeczność. Stąd $\delta_0 = \delta$ i $x(t) = y(t)$ dla $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. ■

2.2 Rozwiązania globalne

Przykład 2.2.1. Rozważmy równania:

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = 1. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Wówczas $x(t) = -\frac{1}{t-2}$ jest jego rozwiązaniem, ale tylko na odcinku $[1, 2)$. Istnieje zatem tylko lokalne rozwiązanie tego problemu.

Twierdzenie 2.2.1. (*Arzeli-Ascoli*) Niech $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie rodziną jednakowo ciągłą, tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \forall t, s \in [a, b] \|t - s\| < \delta \Rightarrow \|x_n(t) - x_n(s)\| < \varepsilon,$$

takich, że $\{x_n(a)\}$ jest ograniczony. Wówczas możemy wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$.

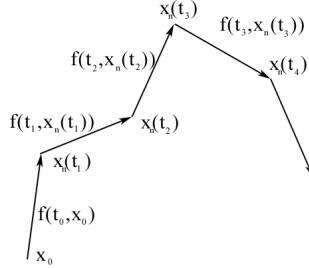
Uwaga 2.2.1. Jeśli funkcje x_n spełniają warunek Lipschitza ze wspólną stałą L ($\|x_n(t) - x_n(s)\| \leq L\|t - s\|$), to $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednakowo ciągła.

Twierdzenie 2.2.2. (*Peano, o istnieniu rozwiązań*) Jeśli $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną, wówczas dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^d$ istnieje funkcja $x : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^d$ klasy C^1 taka, że:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Dowód. Dowód opiera się na przybliżaniu rozwiązania tzw. łamanymi Euler. Rozważmy ciąg podziałów Π_n odcinka $[t_0, t_0 + \alpha]$ postaci $\Pi_n = (t_0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_k^n = t_0 + \alpha)$, którego średnica d_n dąży do zera. Wówczas n-tą łamaną Euler konstruujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x_n(t_0) &= x_0 \\ x_n(t) &= x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) && \text{dla } t \in [t_0, t_1] \\ x_n(t) &= x_n(t_1) + f(t_1, x_n(t_1))(t - t_1) && \text{dla } t \in [t_1, t_2] \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_n(t_i) + f(t_i, x_n(t_i))(t - t_i) && \text{dla } t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned}$$



Najpierw udowodnimy, że x_n spełnia warunek Lipschitza ze stałą M , gdzie M jest ograniczeniem funkcji f . Rzeczywiście :

1° Jeśli $t_i \leq t < s < t_{i+1}$, to

$$\begin{aligned} \|x_n(s) - x_n(t)\| &= \|x_n(t_i) + f(t_i, x_n(t_i))(s - t_i) - x_n(t_i) - f(t_i, x_n(t_i))(t - t_i)\| \\ &= \|f(t_i, x_n(t_i))\| \|s - t\| \leq M \|s - t\|. \end{aligned}$$

2° Jeśli $t_i \leq t \leq t_{i+1} < \dots < t_{i+j} \leq s \leq t_{i+j+1}$, to

$$\begin{aligned} \|x_n(s) - x_n(t)\| &\leq \|x_n(s) - x_n(t_{i+j})\| + \|x_n(t_{i+j}) - x_n(t_{i+j-1})\| + \dots + \|x_n(t_{i+2}) - x_n(t_{i+1})\| \\ &\quad + \|x_n(t_{i+1}) - x_n(t)\| \\ &\leq M((s - t_{i+j}) + (t_{i+j} - t_{i+j-1}) + \dots + (t_{i+2} - t_{i+1}) + (t_{i+1} - t)) \\ &= M(s - t). \end{aligned}$$

Ponadto,

$$\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + \|x_n(t) - x_n(t_0)\| \leq \|x_0\| + M(t - t_0) \leq \|x_0\| + \alpha M = R.$$

Zatem rodzina $\{x_n\}$ spełnia założenia twierdzenia 2.2.1 (Arzeli-Ascoliego). Stąd istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ zbieżny jednostajnie do $x : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^d$. W dalszej części dowodu pokażemy, że funkcja x jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego. Oznaczmy $z_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau$ oraz

$$\varepsilon_n = \sup_{\substack{t, s \in [t_0, t_0 + \alpha] \\ \|t - s\| \leq d_n \\ z_1, z_2 \in K(0, R) \\ \|z_1 - z_2\| \leq M d_n}} \|f(t, z_1) - f(s, z_2)\|. \quad (2.2.3)$$

Ponieważ f jest jednostajnie ciągła na $[t_0, t_0 + \alpha] \times K(0, R)$ oraz $d_n \rightarrow 0$, więc $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Pokażemy, że $\|z_n(t) - x_n(t)\| \leq \varepsilon_n(t - t_0) \leq \varepsilon_n \alpha$.

Dowód indukcyjny:

1° Załóżmy, że $t \in [t_0, t_1]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|z_n(t) - x_n(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau - x_0 - f(t_0, x_0)(t - t_0) \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(\tau, x_n(\tau)) - f(t_0, x_0)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, x_n(\tau)) - f(t_0, x_0)\| d\tau. \end{aligned}$$

Ponieważ dla $\tau \in [t_0, t_1]$, $\|\tau - t_0\| \leq d_n$, więc $\|x_n(\tau) - x_0\| \leq M\|\tau - t_0\| \leq d_n M$, zatem

$$\|z_n(t) - x_n(t)\| \leq \int_{t_0}^t \varepsilon_n d\tau = \varepsilon_n(t - t_0) \quad (2.2.4)$$

2° Załóżmy, że

$$\|z_n(t) - x_n(t)\| \leq \varepsilon_n(t - t_0) \text{ dla } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Wówczas dla dowolnego $t \in [t_i, t_{i+1}]$ mamy

$$\begin{aligned} \|z_n(t) - x_n(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau - x_n(t_i) - f(t_i, x_n(t_i))(t - t_i) \right\| \\ &\leq \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t_i} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau - x_n(t_i) \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t_i}^t (f(\tau, x_n(\tau)) - f(t_i, x_n(t_i))) d\tau \right\| \\ &\leq \|z_n(t_i) - x_n(t_i)\| + \int_{t_i}^t \|f(\tau, x_n(\tau)) - f(t_i, x_n(t_i))\| d\tau. \end{aligned}$$

Ponieważ dla $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$ mamy $\|\tau - t_i\| \leq d_n$, więc $\|x_n(\tau) - x_n(t_i)\| \leq M d_n$, zatem

$$\|z_n(t) - x_n(t)\| \leq \|z_n(t_i) - x_n(t_i)\| + \int_{t_i}^t \varepsilon_n d\tau \leq \varepsilon_n(t_i - t) + \varepsilon_n(t - t_i) = \varepsilon_n(t - t_0). \quad (2.2.5)$$

Ponieważ $x_{n_k} \rightrightarrows x$ oraz $z_n - x_n \rightrightarrows 0$, więc $z_{n_k} \rightrightarrows x$. Rozważmy funkcje $\varphi_n(t) = f(t, x_n(t))$ oraz $\varphi(t) = f(t, x(t))$. Ponieważ f jest jednostajnie ciągła na $[t_0, t_0 + \alpha] \times K(0, R)$, więc

$$\varphi_{n_k} \rightrightarrows \varphi.$$

Zatem dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ otrzymujemy

$$x_0 + \int_{t_0}^t \varphi_{n_k}(\tau) d\tau \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2.2.6)$$

oraz

$$x_0 + \int_{t_0}^t \varphi_{n_k}(\tau) d\tau = z_{n_k}(t) \rightarrow x(t). \quad (2.2.7)$$

Stąd $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$. ■

Do końca tego rozdziału będziemy rozważać funkcje ciągłe, które spełniają następujący warunek:

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) \|x\| + b(t) \text{ dla } (t, x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d, \quad (2.2.8)$$

gdzie $a, b : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}_+$ są funkcjami ciągłymi. Dla tego typu funkcji udowodnimy twierdzenie o globalnym istnieniu rozwiązań problemu Cauchy'ego.

Stwierdzenie 2.2.3. *Jeśli istnieją nieujemne funkcje ciągłe $a, b : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}_+$ takie, że*

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) \|x\| + b(t) \text{ dla } (t, x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d$$

oraz $x : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

to zachodzi nierówność

$$\|x(t)\| \leq \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_0+\alpha} b(\tau) d\tau \right) e^{\left(\int_{t_0}^{t_0+\alpha} a(\tau) d\tau \right)} \text{ dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \quad (2.2.9)$$

Dowód. Oznaczmy $v(t) = \|x(t)\|$. Wówczas

$$\begin{aligned} v(t) &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t (a(\tau) \|x(\tau)\| + b(\tau)) d\tau \\ &= \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_0+\alpha} b(\tau) d\tau \right) + \int_{t_0}^t a(\tau) v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Na mocy lematu 2.1.1 (Gronwalla) otrzymujemy:

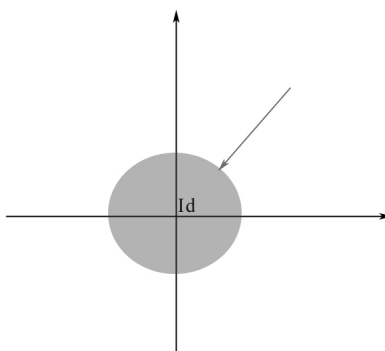
$$\|x(t)\| = v(t) \leq \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_0+\alpha} b(\tau) d\tau \right) e^{\left(\int_{t_0}^{t_0+\alpha} a(\tau) d\tau \right)}.$$



Lemat 2.2.4. Dla dowolnego $C > 0$ rozważmy funkcję $r_C : \mathbb{R}^d \rightarrow K(0, C)$ daną wzorem

$$r_c(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } \|x\| \leq C \\ C \frac{x}{\|x\|} & \text{gdy } \|x\| > C. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Wówczas $\|r_c(x) - r_c(y)\| \leq \|x - y\|$ dla $x, y \in \mathbb{R}^d$.



Dowód. Zaczniemy od następującej uwagi:

Jeśli $\|x\| \geq a \geq \|y\| > 0$, to

$$\left\| y - a \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|x - y\|$$

Rzeczywiście:

$$\begin{aligned}
\left\| y - a \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 &\leq \|x - y\|^2 \\
&\Downarrow \\
\|y\|^2 + a^2 - 2 \frac{a}{\|x\|} \langle x, y \rangle &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle \\
&\Downarrow \\
2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} (\|x\| - a) &\leq \|x\|^2 - a^2 \\
&\Uparrow \\
2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} &\leq \|x\| + a \\
&\Uparrow \\
2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} &\leq 2 \|y\| \leq \|x\| + a
\end{aligned}$$

Wróćmy do $\|r_c(x) - r_c(y)\| \leq \|x - y\|$.

1° Jeśli $\|x\|, \|y\| < C$, to teza jest oczywista.

2° Jeśli $\|y\| \leq C < \|x\|$, to $\|r_c(x) - r_c(y)\| = \left\| C \frac{x}{\|x\|} - y \right\| \leq \|x - y\|$

3° Jeśli $\|x\| \geq \|y\| > C$, to ($a = \|y\|$)

$$\left\| y - \|y\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|x - y\|.$$

Stąd

$$\|r_c(x) - r_c(y)\| = C \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| < \|y\| \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \left\| y - \frac{\|y\|}{\|x\|} x \right\| \leq \|x - y\|.$$

■

Twierdzenie 2.2.5. (O istnieniu globalnych rozwiązań) Jeśli $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą, dla której istnieją nieujemne funkcje ciągłe $a, b : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że:

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) \|x\| + b(t) \quad \text{dla } (t, x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d, \quad (2.2.11)$$

to dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^d$ problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.12)$$

ma rozwiązanie na całym przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Dowód. Połóżmy

$$C := \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_0+\alpha} b(\tau) d\tau \right) e^{\left(\int_{t_0}^{t_0+\alpha} a(\tau) d\tau \right)}. \quad (2.2.13)$$

Następnie rozważmy funkcję $\tilde{f} : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$\tilde{f}(t, x) = f(t, r_c(x)). \quad (2.2.14)$$

Funkcja \tilde{f} jest ciągła ponieważ jest złożeniem funkcji ciągłych f i r_c . Ponadto z ciągłości f istnieje $M > 0$ takie, że

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ dla } (t, x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times K(0, C). \quad (2.2.15)$$

Stąd

$$\|\tilde{f}(t, x)\| = \|f(t, r_c(x))\| \leq M \text{ dla } (t, x) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d. \quad (2.2.16)$$

Możemy zatem skorzystać z Twierdzenia 2.2.2 (Peano) dla

$$\tilde{f} : [t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (2.2.17)$$

Wówczas istnieje jedyna funkcja $\tilde{x} : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^d$ klasy C^1 taka, że:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t)) & \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha] \\ \tilde{x}(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Ponadto

$$\|\tilde{f}(t, x)\| = \|f(t, r_c(x))\| \leq a(t) \|r_c(x)\| + b(t) \leq a(t) \|x\| + b(t).$$

Na mocy Stwierdzenia 2.2.3

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \left(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_0+\alpha} b(\tau) d\tau \right) e^{\left(\int_{t_0}^{t_0+\alpha} a(\tau) d\tau \right)} = C.$$

Stąd

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t)) = f(t, r_c(\tilde{x}(t))) = f(t, \tilde{x}(t)) \\ \tilde{x}(t_0) = x_0. \end{cases}$$

■

Wniosek 2.2.6. *Jeśli $f : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą, dla której istnieje nieujemna funkcja ciągła $a : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq a(t) \|x - y\| \quad \text{dla } t \in [t_0, +\infty) \text{ oraz } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

to dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^d$ istnieje jedyna funkcja różniczkowalna $x : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ taka, że

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{dla } t \in [t_0, +\infty) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dowód. Z założeń

$$\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x) - f(t, x_0)\| + \|f(t, x_0)\| \leq \|f(t, x_0)\| + a(t)(\|x\| + \|x_0\|) = a(t)\|x\| + b(t),$$

gdzie $b(t) = \|f(t, x_0)\| + a(t)\|x_0\|$. Ponadto dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ funkcja $f : [t_0, t_0 + m) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest Lipschitza za stałą $L_m = \sup\{a(t) : t \in [t_0, t_0 + m]\}$. Zatem na mocy Twierdzenia 2.2.5 oraz 2.1.2, dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna funkcja $x_m : [t_0, t_0 + m] \rightarrow \mathbb{R}^d$ spełniająca warunek:

$$\begin{cases} x'_m(t) = f(t, x_m(t)) \\ x_m(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Ze względu na jednoznaczność tych rozwiązań, jeśli $m_1 < m_2$, to

$$x_{m_1}(t) = x_{m_2}(t) \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + m_1].$$

Zatem w sposób jednoznaczny możemy zdefiniować funkcję $x : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ kładąc

$$x(t) := x_m(t) \quad \text{gdy } t \in [t_0, t_0 + m]. \quad (2.2.19)$$

Wówczas $x(t_0) = x_0$ oraz $x'(t) = f(t, x(t))$ dla $t \in [t_0, +\infty)$. Rzeczywiście, jeśli $t \in [t_0, +\infty)$ to znajdziemy $m \in \mathbb{N}$ takie, że $t \in [t_0, t_0 + m + 1]$. Wówczas

$$x'(t) = x'_m(t) = f(t, x_m(t)) = f(t, x(t)). \quad (2.2.20)$$

■

3 Schematy numeryczne

3.1 Definicje i podstawowe własności

Rozważmy problem Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ dla } t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

gdzie $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną i ciągłą, spełniającą warunek Lipschitza ze względu na x . Chcemy to zagadnienie rozwiązać numerycznie na przedziale $[t_0, T]$. W tym celu dzielimy przedział na N równych części o długości $h = \frac{T-t_0}{N}$, za pomocą punktów $t_k = t_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, N$. W dalszym ciągu będziemy szukać przybliżonych rozwiązań w punktach t_k . Oznacza to, że szukamy ciągu x_1, \dots, x_N o tej własności, że możliwie dobrze przybliży on ciąg $x(t_0), \dots, x(t_N)$. Przy dobrze dobranej metodzie oba ciągi powinny zbiegać do siebie, gdy $h \rightarrow 0$. Jak konstruować takie metody? W tym celu można odwołać się do wzoru Taylora. Załóżmy, że $x(t)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (3.1.1), wówczas:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + O(h^2) = x(t) + hf(t, x(t)) + O(h^2), \quad (3.1.2)$$

przy czym

$$\begin{aligned} A(h) = O(h^p) &\Leftrightarrow \exists_{c>0} |A(h)| \leq c|h^p| \\ A(h) = o(h^p) &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h)}{h^p} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Zatem

$$x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + hf(t_k, x(t_k)) \approx x(t_k) + hf(t_k, x_k), \quad (3.1.4)$$

co prowadzi do tzw. schematu Eulera

$$x_{k+1} = x_k + hf_k = x_k + hf(t_k, x_k). \quad (3.1.5)$$

Zatem znając warunek startowy x_0 i korzystając ze wzoru rekurencyjnego (3.1.5) możemy wyznaczyć cały ciąg x_0, x_1, \dots, x_N .

Zamieniając miejscami t i $t+h$ we wzorze Taylora otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t+h) - hx'(t+h) + O(h^2) = \\ &= x(t+h) - hf(t+h, x(t+h)) + O(h^2), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

co prowadzi do zamkniętego schematu Eulera postaci:

$$x_{k+1} = x_k + hf_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1}, x_{k+1}). \quad (3.1.7)$$

W pierwszym schemacie Eulera (3.1.5) w jawny sposób wyliczymy x_{k+1} znając x_k . Takie schematy nazywamy otwartymi. W zamkniętym schemacie Eulera (3.1.7) x_{k+1} jest przedstawiony w sposób uwikłany. Tego typu schematy nazywamy zamkniętymi i dają one znacznie lepsze rezultaty numeryczne niż podobne schematy otwarte.

Definicja 3.1.1. Schemat postaci

$$x_{i+1} = x_i + h\phi_f(h, t_i, x_i, x_{i+1}) \text{ dla } i = 0, \dots, N-1, \quad (3.1.8)$$

gdzie ϕ_f jest funkcją zależną od f , nazywamy schematem jednokrokovym. Schemat taki jest otwarty, jeśli ϕ_f nie zależy od ostatniej współrzędnej.

Mając schemat oraz wartość x_0 możemy rekurencyjnie wyznaczyć ciąg $\{x_i\}$, który ma przybliżać rozwiązanie $\{x(t_i)\}$.

Schematy Eulera są jednak mało dokładne. Aby otrzymać lepszy schemat trzeba skorzystać ze wzoru Taylora wyższego rzędu:

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{d}{dt}f(t, x(t)) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))x'(t) \\ &= f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))f(t, x(t)), \end{aligned}$$

gdzie $f_x(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$, $f_t(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$. Prowadzi to do schematu Taylora:

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_k, x_k) + f_x(t_k, x_k)f(t_k, x_k)). \quad (3.1.9)$$

Definicja 3.1.2. Mówimy, że schemat (3.1.8) jest zbieżny, gdy dla dowolnego $t \in [t_0, T]$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli

$$1^\circ t = t_0 + kh, \quad k \rightarrow +\infty, \quad h \rightarrow 0,$$

$$2^\circ x_0(h) \rightarrow x_0, \quad \text{dla } h \rightarrow 0,$$

to $x_k \rightarrow x(t)$, gdzie $x(t)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (3.1.1), natomiast $\{x_i\}$ jest ciągiem uzyskanym za pomocą schematu, gdy warunek startowy wynosi $x_0(h)$.

Definicja 3.1.3. Schemat (3.1.8) jest rzędu p , jeśli dla dowolnego rozwiązania $x \in C^p([t_0, T])$ zagadnienia (3.1.1) istnieje $C > 0$ takie, że

$$|r_k| \leq Ch^{p+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1.10)$$

gdzie $x(t_k + h) = x(t_k) + h\phi_f(h, t_k, x(t_k), x(t_{k+1})) + r_k$ (r_k nazywany jest błędem lokalnym schematu), oraz powyższy warunek nie jest prawdziwy dla $p + 2$.

Aby zbadać zbieżność schematu należy jednak oszacować tzw. globalny błąd schematu, czyli

$$e_k = x(t_k) - x_k. \quad (3.1.11)$$

Później przekonamy się, że prędkość zbieżności e_k do zera zależy od rzędu schematu.

Przykład 3.1.1. Wyznamy rząd otwartego schematu Eulera $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$. Wówczas

$$\begin{aligned} r_k &= x(t_k + h) - x(t_k) - hf(t_k, x(t_k)) \\ &= x(t_k) + hx'(t_k) + \frac{h^2}{2}x''(t_k) + o(h^2) - x(t_k) - hx'(t_k) \\ &= \frac{h^2}{2}x''(t_k) + o(h^2), \end{aligned}$$

zatem jest to schemat 1-ego rzędu.

Przykład 3.1.2. Wyznamy rząd schematu $x_{k+1} = x_k + h(\alpha f_k + (1 - \alpha)f_{k+1})$, gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} r_k &= x(t_k + h) - x(t_k) - h\alpha f(t_k, x(t_k)) - h(1 - \alpha)f(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \\ &= x(t_k + h) - x(t_k) - \alpha hx'(t_k) - (1 - \alpha)hx'(t_k + h) \\ &= hx'(t_k) + \frac{h^2}{2}x''(t_k) + \frac{h^3}{6}x'''(t_k) + o(h^3) - \alpha hx'(t_k) \\ &\quad - (1 - \alpha) \left(hx'(t_k) + h^2x''(t_k) + \frac{h^3}{2}x'''(t_k) + o(h^3) \right) \\ &= h^2 \left(\frac{1}{2} - (1 - \alpha) \right) x''(t_k) + h^3 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} \right) x'''(t_k) + o(h^3), \end{aligned}$$

zatem rząd schematu jest ≥ 1 oraz równy 2, jeśli $\alpha = \frac{1}{2}$ (schemat trapezów).

Ćwiczenie: Pokazać że schemat Taylora jest rzędu 2.

W dalszej części rozważań zajmiemy się tylko schematami otwartymi, lecz wszystkie twierdzenia prawdziwe będą również dla schematów zamkniętych.

Definicja 3.1.4. Schemat $x_{k+1} = x_k + h\phi_f(h, t_k, x_k)$ jest zgodny, jeśli

1° funkcja ϕ_f jest ciągła,

2° spełnia warunek Lipschitza

$$|\phi_f(h, t, x) - \phi_f(h, t, y)| \leq L|x - y|,$$

3° $\phi_f(0, t, x) = f(t, x)$.

Ćwiczenie: Sprawdzić czy znane nam schematy są zgodne.

Lemat 3.1.1. Niech a, b będą stałymi dodatnimi takimi, że ciąg $\{\mu_n\}$ spełnia warunek

$$|\mu_{k+1}| \leq a|\mu_k| + b \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.12)$$

Wówczas

$$|\mu_k| \leq a^k |\mu_0| + \begin{cases} \frac{a^k - 1}{a - 1} b & \text{gdym } a \neq 1 \\ kb & \text{gdym } a = 1 \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Dowód. (indukcja)

1° Dla $k = 0$ zachodzi równość.

2° Załóżmy że teza jest prawdziwa dla pewnego k . Wówczas

$$\begin{aligned} |\mu_{k+1}| &\leq a|\mu_k| + b \leq a^{k+1}|\mu_0| + \begin{cases} \left(a \frac{a^k - 1}{a - 1} + 1\right) b & \text{gdym } a \neq 1 \\ (k + 1)b & \text{gdym } a = 1 \end{cases} \\ &= a^{k+1}|\mu_0| + \begin{cases} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} b & \text{gdym } a \neq 1 \\ (k + 1)b & \text{gdym } a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 3.1.2. Jeśli schemat jest zgodny, to jest zbieżny.

Dowód. Oszacujmy błąd globalny $e_k = x(t_k) - x_k$. Wiemy, że

$$x_{k+1} = x_k + h\phi(h, t_k, x_k)$$

oraz

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + h \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h} = x(t_k) + hx'(t_k + \theta h)$$

dla pewnego $0 \leq \theta \leq 1$. Zatem

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k + h [(\phi(h, t_k, x(t_k)) - \phi(h, t_k, x_k)) \\ &\quad + (\phi(0, t_k, x(t_k)) - \phi(h, t_k, x(t_k))) \\ &\quad + (f(t_k + \theta h, x(t_k + \theta h)) - f(t_k, x(t_k)))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq |e_k| + Lh|e_k| + h [|\phi(0, t_k, x(t_k)) - \phi(h, t_k, x(t_k))| \\ &\quad + |f(t_k + \theta h, x(t_k + \theta h)) - f(t_k, x(t_k))|]. \end{aligned}$$

Położmy $R = |x_0| + M(T - t_0)$ oraz

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = \sup_{\substack{t, t' \in [t_0, T] \\ |x| \leq R}} |\phi(h, t, x) - \phi(0, t, x)| + \sup_{\substack{t, t' \in [t_0, T] \\ |t - t'| \leq h \\ |x|, |x'| \leq R \\ |x - x'| \leq Mh}} |f(t, x) - f(t', x')|. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Ponieważ ϕ jest funkcją ciągłą, więc $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ dla $h \rightarrow 0$. Ponieważ $x(t)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (3.1.1), więc

$$|x(t) - x(t')| = \left| \int_t^{t'} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq M|t - t'|$$

oraz $|x(t)| \leq |x_0| + M(T - t_0) = R$. Stąd

$$|e_{k+1}| \leq (1 + hL)|e_k| + h\varepsilon(h) \quad (3.1.15)$$

Korzystając z lematu 3.1.1 otrzymujemy

$$|e_k| \leq (1 + hL)^k |e_0| + \begin{cases} \frac{(1+hL)^k - 1}{hL} h\varepsilon(h) & \text{gdym } L \neq 0 \\ kh\varepsilon(h) & \text{gdym } L = 0. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Ponadto, gdy $t = t_0 + kh$, to

$$(1 + hL)^k \leq e^{hLk} = e^{L(t-t_0)} \leq e^{L(T-t_0)} \quad (3.1.17)$$

oraz $e_0 = x_0 - x_0(h)$. Zatem

$$|e_k| \leq e^{(T-t_0)L}|x_0(h) - x_0| + \begin{cases} \frac{e^{L(T-t_0)}}{L}\varepsilon(h) & \text{gdy } L \neq 0 \\ (T - t_0)\varepsilon(h) & \text{gdy } L = 0. \end{cases} \quad (3.1.18)$$

Stąd

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_k = 0.$$

■

Twierdzenie 3.1.3. *Jeśli schemat (3.1.8) jest rzędu p , zgodny oraz, jeśli rozwiązanie problemu Cauchy'ego (3.1.1) jest klasy $C^{p+1}([t_0, T])$, to*

$$|e_k| \leq O(|x_0(h) - x_0|) + O(h^p) \quad (3.1.19)$$

Dowód. Tak jak w poprzednim dowodzie

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k - h\phi(h, t_k, x_k) + x(t_k + h) - x(t_k) \\ &= e_k + h(\phi(h, t_k, x(t_k)) - \phi(h, t_k, x_k)) + r_k. \end{aligned}$$

Zatem $|e_{k+1}| \leq (1 + hL)|e_k| + Ch^{p+1}$. Stąd

$$|e_k| \leq e^{(T-t_0)L}|e_0| + \begin{cases} \frac{e^{(T-t_0)L}}{L}Ch^p & \text{gdy } L \neq 0 \\ (T - t_0)Ch^p & \text{gdy } L = 0. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

■

3.2 Schematy Rungego-Kutty

Definicja 3.2.1. Schemat ϕ_f nazywamy r -poziomowym schematem Rungego-Kutty, jeśli

$$\phi_f(h, t, x) = \sum_{i=1}^r c_i K_i,$$

gdzie K_1, \dots, K_r są uwikłane wzorami

$$K_i = K_i(h, t, x) = f\left(t + h \sum_{j=1}^r b_{ij}, x + h \sum_{j=1}^r b_{ij} K_j\right)$$

dla $i = 1, \dots, r$.

Jeśli $b_{ij} = 0$ dla $i \geq j$, to K_i wyraża się w sposób jawny

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t, x) \\ K_i &= f\left(t + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, x + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j\right) \text{ dla } i = 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Wyznamy wszystkie sensowne otwarte 2-poziomowe schematy Rungego-Kutty, czyli schematy postaci:

$$x_{k+1} = x_k + h(c_1 K_1 + c_2 K_2)$$

$$K_1 = f(t_k, x_k), K_2 = f(t_k + hb, x_k + hb f(t_k, x_k)).$$

Wyznamy błąd lokalny tego schematu

$$r_k = x(t_k + h) - x(t_k) - h\phi(h, t_k, x_k(t)),$$

$$\text{gdzie } \phi(h, t_k, x_k(t)) = c_1 f_k + c_2 f(t_k + hb, x_k + hb f_k).$$

Przypomnienie: 2-wymiarowy wzór Taylora

$$\begin{aligned} &f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \\ &= f(x_1, x_2) + Df(x_1, x_2)(h_1, h_2) + \frac{1}{2} D^2 f(x_1, x_2)(h_1, h_2)^2 + o(h_1^2 + h_2^2) \\ &= f(x_1, x_2) + f_{x_1}(x_1, x_2)h_1 + f_{x_2}(x_1, x_2)h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{x_1 x_1}(x_1, x_2)h_1^2 + 2f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)h_1 h_2 + f_{x_2 x_2}(x_1, x_2)h_2^2) + o(h_1^2 + h_2^2). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\phi(h, t_k, x(t_k)) &= c_1 f_k + c_2 f(t_k + hb, x_k + hb f_k) \\
&= (c_1 + c_2) f_k + c_2 [bh f_{t,k} + bh f_{x,k} f_k + \frac{1}{2}(b^2 h^2 f_{tt,k} + b^2 h^2 f_{tx,k} f_k + b^2 h^2 f_{xx,k} f_k^2)] + o(h^2) \\
&= (c_1 + c_2) f_k + c_2 bh (f_{t,k} + f_{x,k} f_k) + \frac{1}{2} c_2 b^2 h^2 (f_{tt,k} + 2f_{tx,k} f_k + f_{xx,k} f_k^2) + o(h^2),
\end{aligned}$$

natomiast

$$x(t_k + h) - x(t_k) = hx'(t_k) + \frac{h^2}{2} x''(t_k) + \frac{h^3}{6} x'''(t_k) + o(h^3),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
x'(t_k) &= f(x_k, x(t_k)) = f_k \\
x''(t_k) &= f_t(t_k, x(t_k)) + f_x(t_k, x(t_k)) x'(t_k) = f_{t,k} + f_{x,k} f_k \\
x'''(t_k) &= f_{tt,k} + f_{tx,k} f_k + f_{xt,k} f_k + f_{xx,k} f_k^2 + f_{x,k} f_{t,k} + f_{x,k}^2 f_k,
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}
x(t_k + h) - x(t_k) &= hf_k + \frac{h^2}{2} (f_{x,k} + f_{x,k} f_k) + \frac{h^3}{6} (f_{tt,k} + 2f_{tx,k} f_k + f_{xx,k} f_k^2 + f_{x,k} f_{t,k} + f_{x,k}^2 f_k) + o(h^3).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
r_k &= (1 - (c_1 + c_2)) h f_k + (\frac{1}{2} - c_2 b) h^2 (f_{t,k} + f_{x,k} f_k) + \\
&\quad + h^3 ((\frac{1}{6} - \frac{1}{2} c_2 b^2) (f_{tt,k} + 2f_{tx,k} f_k + f_{xx,k} f_k^2) + \frac{1}{6} (f_{x,k} f_{t,k} + f_{x,k}^2 f_k)) \\
&\quad + o(h^3).
\end{aligned}$$

Jeśli $c_1 + c_2 = 1$, $c_2 b = \frac{1}{2}$, to rząd schematu jest równy 2 i nie można go polepszyć. Podstawiając $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $b = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_k) \quad (3.2.1)$$

zmodyfikowany schemat Eulera, natomiast dla $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $b = 1$ otrzymujemy

$$x_{k+1} = x_k + h \frac{f_k + f(t_{k+1}, x_k + hf_k)}{2} \quad (3.2.2)$$

schemat Henna.

Ćwiczenie: Pokazać, że zamknięty schemat Rungego-Kutty postaci:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{1}{2}h(K_1 + K_2) \\ K_1 &= f\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right), x_k + \frac{1}{4}hK_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)K_2\right) \\ K_2 &= f\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right), x_k + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hK_1 + \frac{1}{4}hK_2\right) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

ma rząd ≥ 3

3.3 Praktyczne zastosowania schematów numerycznych

Rozważmy problem:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ dla } t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

gdzie $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, ograniczoną i Lipschitza ze względu na x . Chcemy rozwiązać to równanie stosując pewien schemat zgodny ϕ_f rzędu p . Dodatkowo chcemy znać rozwiązanie ze z góry zadaną dokładnością E_g . Jeśli będziemy stosować schemat ϕ ze stałą długością kroku równą h , to wiemy, że $|e_k| \leq Ch^p$. Jednak stała C jest zwykle bardzo duża i chcąc zachować nierówność $Ch^p \leq E_g$ musimy wykonywać bardzo małe kroki, co nie jest wygodne.

Alternatywą dla tej metody jest ciągła zmiana długości kroku. Spróbujmy dobrać tak długość kroków, żeby

$$|e_k| = |x(t_k) - x_k| \leq E_g \frac{t_k - t_0}{T - t_0} \quad (3.3.2)$$

Zanim przejdziemy do opisu metody sformułujemy przydatną uwagę.

Uwaga 3.3.1. Niech

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Wówczas

$$x(t_0 + h) - y(t_0 + h) = (x_0 - y_0)(1 + O(h))$$

ponieważ

$$\begin{aligned}
x(t_0 + h) - y(t_0 + h) &= x_0 + x'(t_0)h - y_0 - y'(t_0)h + O(h^2) = \\
&= x_0 - y_0 + (f(t_0, x_0) - f(t_0, y_0))h + O(h^2) = \\
&= (x_0 - y_0) + f_x(t_0, y_0)(x_0 - y_0)h + O(h^2) \\
&= (x_0 - y_0)(1 + O(h))
\end{aligned}$$

Założmy, że skonstruowaliśmy już x_k tak aby spełniał (3.3.2). Wykonajmy teraz krok długości h (to właśnie ta długość kroku będzie później dobierana) wykorzystując schemat ϕ , czyli

$$x_{k+1} = x_k + h\phi(h, t_k, x_k). \quad (3.3.4)$$

Niech u jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (3.3.1) z warunkiem początkowym $u(t_k) = x_k$. Wówczas

$$|e_{k+1}| = |x(t_{k+1}) - x_{k+1}| \leq |x(t_{k+1}) - u(t_{k+1})| + |u(t_{k+1}) - x_{k+1}|. \quad (3.3.5)$$

Korzystając z Uwagi 3.3.1 mamy

$$\begin{aligned}
|x(t_{k+1}) - u(t_{k+1})| &= |x(t_k) - x_k|(1 + O(h)) = |e_k|(1 + O(h)) \\
&\leq E_g \frac{t_k - t_0}{T - t_0} (1 + O(h))
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
|u(t_{k+1}) - x_{k+1}| &= |u(t_{k+1}) - u(t_k) - h\phi(h, t_k, u(t_k))| \\
&= |r_k| = |R|h^{p+1} + O(h^{p+2}),
\end{aligned} \quad (3.3.6)$$

gdzie $r_k = Rh^{p+1} + O(h^{p+2})$

Zauważmy jeszcze, że wystarczy wiedzieć, że:

$$|u(t_{k+1}) - x_{k+1}| \leq \frac{E_g h}{T - t_0} \quad (3.3.7)$$

Wówczas $|e_{k+1}| \leq E_g \frac{t_{k+1} - t_0}{T - t_0}$. Gdybyśmy znali R to moglibyśmy wywnioskować (3.3.7) na podstawie (3.3.6). Spróbujmy wyznaczyć R . W tym celu rozważmy w - rozwiązanie problemu Cauchy'ego (3.3.1) z warunkiem początkowym $w(t_{k+1}) = x_{k+1}$ oraz $w_{k+2} = x_k + 2h\phi(2h, t_k, x_k)$. Niech

$$x_{k+2} = x_{k+1} + h\phi(h, t_{k+1}, x_{k+1}) = w(t_{k+1}) + h\phi(h, t_{k+1}, w(t_{k+1})).$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} w_{k+2} - x_{k+2} &= - (u(t_{k+2}) - w_{k+2}) + (u(t_{k+2}) - w(t_{k+2})) + \\ &\quad + (w(t_{k+2}) - x_{k+2}). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Ponadto:

$$\begin{aligned} w(t_{k+2}) - x_{k+2} &= w(t_{k+2}) - w(t_{k+1}) - h\phi(h, t_{k+1}, w(t_{k+1})) \\ &= Rh^{p+1} + O(h^{p+2}) \end{aligned}$$

na mocy Uwagi 3.3.1

$$\begin{aligned} u(t_{k+2}) - w(t_{k+2}) &= (u(t_{k+1}) - w(t_{k+1}))(1 + O(h)) \\ &= (u(t_{k+1}) - x_{k+1})(1 + O(h)) \\ &= (u(t_{k+1}) - u(t_k) - h\phi(h, t_k, u(t_k)))(1 + O(h)) \\ &= (Rh^{p+1} + O(h^{p+2}))(1 + O(h)) = Rh^{p+1} + O(h^{p+2}) \\ u(t_{k+2}) - w_{k+2} &= u(t_{k+2}) - u(t_k) - 2h\phi(2h, t_k, u(t_k)) \\ &= R(2h)^{p+1} + O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

Zatem

$$x_{k+2} - w_{k+2} = 2(2^p - 1)Rh^{p+1} + O(h^{p+2}) \quad (3.3.9)$$

stąd

$$|R|h^{p+1} = \frac{1}{2} \frac{|w_{k+2} - x_{k+2}|}{2^p - 1} + O(h^{p+2}) \quad (3.3.10)$$

oraz

$$\begin{aligned} |u(t_{k+2}) - x_{k+2}| &= \frac{1}{2} \frac{|w_{k+2} - x_{k+2}|}{2^p - 1} + O(h^{p+2}) \\ &\leq \frac{|w_{k+2} - x_{k+2}|}{2^p - 1}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Jeśli

$$\frac{|w_{k+2} - x_{k+2}|}{2^p - 1} \leq E_g \frac{h}{T - t_0} \quad (3.3.12)$$

to mamy dobre ograniczenie błędu. Jeśli nie, to musimy skrócić krok do γh . Przy czym γ musimy dobrać tak żeby

$$\begin{aligned} |u(t_{k+2}) - x_{k+2}| &= |R|\gamma^{p+1}h^{p+1} + O(h^{p+2}) \\ &\leq \gamma^{p+1} \frac{|w_{k+2} - x_{k+2}|}{2^p - 1} \leq? E_g \frac{\gamma h}{T - t_0}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Wystarczy zatem wziąć:

$$\gamma = \left(\frac{E_g h}{T - t_0} \cdot \frac{2^p - 1}{|w_{k+1} - x_{k+2}|} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.3.14)$$

W praktyce, wygodnie jest stosować następujący algorytm:

1. Dane są $\{t_k, x_k, h_0\}$, gdzie (t_k, x_k) jest przybliżonym rozwiązaniem w t_k , zaś h_0 długością kroku.
2. Wyznaczamy (poprzez schemat) wartości x_{k+1} idąc z krokiem długości h_0 z (t_k, x_k) , x_{k+2} idąc z krokiem długości h_0 z (t_{k+1}, x_{k+1}) oraz w_{k+2} idąc z krokiem długości $2h_0$ z (t_k, x_k) .
3. Wyznaczamy $\gamma = \left(\frac{E_g h_0}{T - t_0} \cdot \frac{2^p - 1}{|x_{k+2} - w_{k+2}|} \right)^{\frac{1}{p}}$ oraz kładziemy $h_1 = c\gamma h_0$ ($c \approx 0,8$ z dodatkowym ograniczeniem: $\frac{h_0}{5} \leq h_1 \leq 5h_0$).
4. Jeśli $h_1 < h_0$, to sprawdzamy czy

$$\frac{|x_{k+2} - w_{k+2}|}{2^p - 1} \leq E_g \frac{h_0}{T - t_0} \quad (3.3.15)$$

- (a) Jeśli nierówność jest spełniona, to akceptujemy wartości x_{k+1}, x_{k+2} jako rozwiązanie i przechodzimy do 1) z $\{t_{k+2}, x_{k+2}, h_0\}$.
 - (b) Jeśli nie jest spełniona, to wracamy do 1) z $\{t_k, x_k, h_1\}$.
5. Jeśli $h_1 > h_0$, to akceptujemy wartości x_{k+1}, x_{k+2} jako rozwiązanie i przechodzimy do punktu 1 z $\{t_{k+2}, x_{k+2}, h_1\}$.

4 Układy równań liniowych

W tej części wykładu będziemy rozważać równania liniowe, czyli równania postaci

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \text{ dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad (4.0.16)$$

gdzie $A(t)$ jest $d \times d$ -macierzą, czyli $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1\dots d}$, gdzie $a_{ij} : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągle, oraz $b(t) \in \mathbb{R}^d$ gdzie $b : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą.

Jeśli A, b są funkcjami stałymi to mówimy o równaniu liniowym o stałych współczynnikach. Jeśli $b = 0$, to równanie nazywamy *jednorodnym*.

Dla dowolnego przekształcenia liniowego $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ oznaczymy

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (4.0.17)$$

Wówczas dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$\|Ax\| = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Ponadto

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}^2 \sum_{k=1}^d x_k^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}^2 \|x\|^2, \quad (4.0.18)$$

zatem $\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$. Również

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (4.0.19)$$

ponieważ gdy $\|x\| = 1$ to wtedy

$$\|(A + B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \|x\| + \|B\| \|x\| = \|A\| + \|B\|. \quad (4.0.20)$$

Stąd

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| \leq \|A\| + \|B\|. \quad (4.0.21)$$

Niech $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas pokażemy, że $t \mapsto \|A(t)\|$ też jest ciągłą. Załóżmy, że $t_k \rightarrow t$. Wówczas

$$\|A(t_k) - A(t)\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} (a_{ij}(t_k) - a_{ij}(t))^2} \rightarrow 0. \quad (4.0.22)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \|A(t_k)\| &\leq \|A(t_k) - A(t)\| + \|A(t)\| \\ \|A(t)\| &\leq \|A(t) - A(t_k)\| + \|A(t_k)\|, \end{aligned} \quad (4.0.23)$$

stąd $\| \|A(t_k)\| - \|A(t)\| \| \leq \|A(t) - A(t_k)\| \rightarrow 0$, zatem $t \rightarrow \|A(t)\|$ jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 4.0.1. *Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^d$ problem Cauchy'ego*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.0.24)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na $[t_0, t_0 + \alpha]$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$).

Dowód. Oznaczmy $f(t, x) = A(t)x + b(t)$. Wówczas

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \|x - y\|. \quad (4.0.25)$$

Ponadto funkcje $(t, x) \mapsto f(t, x)$ oraz $t \mapsto \|A(t)\|$ są ciągłe. Zatem f spełnia założenia Wniosku 2.2.6.

■

Dla dowolnego równania

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad (\text{RNJ}) \quad (4.0.26)$$

przez (RJ) będziemy oznaczać równanie

$$x'(t) = A(t)x(t). \quad (4.0.27)$$

Twierdzenie 4.0.2. *1. Rozwiązanie równania (RJ) tworzy d -wymiarową przestrzeń liniową.*

2. Jeśli $x_0(t)$ jest pewnym szczególnym rozwiązaniem (RNJ) oraz $x_1(t), \dots, x_d(t)$ tworzą bazę rozwiązań (RJ) , to każde rozwiązanie (RNJ) jest postaci

$$x(t) = x_0(t) + c_1 x_1(t) + \dots + c_d x_d(t), c_i \in \mathbb{R} \quad (4.0.28)$$

Dowód. 1. Niech E będzie zbiorem wszystkich rozwiązań (RJ). Niech $x_1, x_2 \in E$ oraz $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$. Wówczas:

$$x'(t) = c_1x_1'(t) + c_2x_2'(t) = c_1A(t)x_1(t) + c_2A(t)x_2(t) = A(t)x(t). \quad (4.0.29)$$

Stąd $x \in E$. Następnie udowodnimy, że $\dim E = d$.

Rozważmy przekształcenie liniowe $L : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ dane wzorem: $L(x) = x(t_0)$. Ze względu na poprzednie twierdzenie dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^d$ istnieje dokładnie jedna funkcja x spełniająca (RJ) oraz $L(x) = x(t_0) = y$, zatem L jest „na„. L jest również różnowartościowe. Weźmy $x \in E$ takie, że $L(x) = x(t_0) = 0$. Oczywiście funkcja $x(t) = 0$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ jest rozwiązaniem (RJ) z warunkiem początkowym $x(t_0) = 0$. Ze względu na jednoznaczność rozwiązań (RJ), $x \equiv 0$. Ponieważ $L : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, więc $\dim E = d$.

2. Jeśli x jest rozwiązaniem (RNJ) to łatwo sprawdzić, że

$$x - x_0 \in E \quad (4.0.30)$$

■

Twierdzenie 4.0.3. (Liouville'a) Niech $Y(t)$ będzie $d \times d$ -macierzą spełniającą równanie

$$Y'(t) = A(t) \cdot Y(t) \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \quad (4.0.31)$$

Oznaczmy $\Delta(t) = \det Y(t)$. Wówczas:

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau} \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \quad (4.0.32)$$

Dowód. Niech

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{bmatrix} \quad (4.0.33)$$

Wówczas $y'_k(t) = \sum_{i=1}^d a_{ki}(t)y_i(t)$. Ponadto

$$\begin{aligned}
 \Delta'(t) &= \frac{d}{dt} \det Y(t) = \frac{d}{dt} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{1\sigma(1)}(t) \cdot \dots \cdot y_{d\sigma(d)}(t) \\
 &= \sum_{k=1}^d \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{1\sigma(1)}(t) \cdot \dots \cdot y'_{k\sigma(k)}(t) \cdot \dots \cdot y_{d\sigma(d)}(t) = \\
 &= \sum_{k=1}^d \det \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y'_k(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^d \det \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d a_{ki}(t)y_i(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d a_{ki}(t) \det \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^d a_{kk}(t) \det Y(t) = \operatorname{tr} A(t) \Delta(t).
 \end{aligned}$$

Czyli $\Delta'(t) = \operatorname{tr} A(t) \Delta(t)$. Łatwo sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem tego równania jest

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau}. \quad (4.0.34)$$

■

Definicja 4.0.1. Macierzą fundamentalną (rozwiązaniem fundamentalnym) równania $x'(t) = A(t)x(t)$ nazywamy funkcję $t \mapsto Y(t) \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ taką, że

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) \\ \det Y(t) \neq 0 \end{cases} \quad (4.0.35)$$

Jeśli dodatkowo $Y(t_0) = Id$ to będziemy je oznaczać $Y(t, t_0)$.

Wniosek 4.0.4. Każde równanie jednorodne posiada macierz fundamentalną.

Dowód. Niech $x_k, k = 1, \dots, d$ będzie rozwiązaniem (RJ) z warunkiem początkowym $x_k(t_0) = (0, \dots, \hat{1}_k, \dots, 0)$. Połóżmy wówczas

$$Y(t) = [x_1(t) \dots x_d(t)]. \quad (4.0.36)$$

Wtedy

$$A(t)Y(t) = [A(t)x_1(t) \dots A(t)x_d(t)] = [x'_1(t) \dots x'_d(t)] = Y'(t). \quad (4.0.37)$$

Ponadto $\det Y(t) = \det Y(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau} = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau} \neq 0$.

■

Uwaga 4.0.2. Jeśli $Y(t)$ jest dowolnym rozwiązaniem fundamentalnym równania $x'(t) = A(t)x(t)$ to rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = A(t) \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.0.38)$$

ma postać $x(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1} \cdot x_0$, ponieważ

$$x'(t) = Y(t)'Y(t_0)^{-1} \cdot x_0 = A(t)Y(t)Y(t_0)^{-1} \cdot x_0 = A(t)x(t)$$

oraz

$$x(t_0) = Y(t_0)Y(t_0)^{-1} \cdot x_0 = Idx_0 = x_0.$$

Zatem $Y(t, t_0) = Y(t)Y(t_0)^{-1}$.

Twierdzenie 4.0.5. *Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.0.39)$$

jest postaci

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \quad (4.0.40)$$

gdzie $Y(t)$ jest dowolnym rozwiązaniem fundamentalnym.

Dowód. Niech $Y(t) = [x_1(t) \dots x_d(t)]$. Wówczas dowolne rozwiązanie (RJ) jest postaci

$$x(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_dx_d(t). \quad (4.0.41)$$

Aby rozwiązać (RNJ) zastosujemy metodę uzmienniania stałych tzn. rozwiązania będziemy szukać spośród funkcji postaci

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_d(t)x_d(t), \quad \text{gdzie } c_i : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.0.42)$$

Oznaczmy $c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{bmatrix}$. Wówczas $x(t) = Y(t) \cdot c(t)$. Po podstawieniu do (RNJ) otrzymujemy:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) = A(t)Y(t)c(t) + b(t),$$

z drugiej strony

$$x'(t) = Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) = A(t)Y(t)c(t) + Y'(t)c(t).$$

Stąd $Y(t) \cdot c'(t) = b(t)$ oraz $c'(t) = Y(t)^{-1}b(t)$. Zatem

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

Ponadto $x_0 = Y(t_0)c(t_0)$ więc

$$c(t) = Y(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

Czyli:

$$x(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}x_0 + Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \quad (4.0.43)$$

■

4.1 Równania liniowe o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie postaci:

$$x'(t) = Ax(t), A \in M_{d \times d}(\mathbb{R}). \quad (4.1.1)$$

Przypomnijmy, że na $M_{d \times d}(\mathbb{R})$ mamy normę zdefiniowaną następująco $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Fakt 4.1.1. *Przestrzeń $M_{d \times d}(\mathbb{R})$ z metryką $d(A, B) = \|A - B\|$ jest przestrzenią zupełną, czyli każdy ciąg fundamentalny jest zbieżny. Przypomnijmy, że $\{x_n\}$ jest fundamentalny (Cauchy'ego), jeśli:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 d(x_n, x_m) < \varepsilon. \quad (4.1.2)$$

Rozważmy ciąg $s_n = Id + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^n}{n!}$. Wówczas:

$$\|s_{n+k} - s_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{A^i}{i!} \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{\|A\|^i}{i!} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} \rightarrow 0, \quad (4.1.3)$$

gdym $n \rightarrow \infty$, więc s_n jest fundamentalny.

Definicja 4.1.1.

$$e^A := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (4.1.4)$$

Lemat 4.1.2. *Jeśli $B \cdot C = C \cdot B$, to $e^{B+C} = e^B \cdot e^C$.*

Dowód. Po pierwsze jeśli $B \cdot C = C \cdot B$, to $(B+C)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$ (zostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie). Ponadto

$$\begin{aligned} e^{B+C} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B+C)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k C^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \frac{C^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{B^k}{k!} \frac{C^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \frac{C^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C^l}{l!} = e^B \cdot e^C. \end{aligned}$$

■

Aby w sposób nieformalny znaleźć rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

posłużymy się dowodem tw. Picarda. Rozważmy ciąg funkcji

$$\begin{aligned} y_0 &\equiv x_0 \\ y_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t Ay_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Wówczas

$$y_n(t) = (I + A(t - t_0) + \frac{A^2(t - t_0)^2}{2} + \dots + \frac{A^n(t - t_0)^n}{n!})x_0. \quad (4.1.7)$$

Ten fakt udowodnimy indukcyjnie.

1^o $n = 0$ oczywiste.

2^o założmy, że $y_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!} x_0$. Wówczas

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t A \sum_{k=0}^n \frac{A^k(\tau - t_0)^k}{k!} \cdot x_0 d\tau \\ &= x_0 + \sum_{k=0}^n \int_{t_0}^t \frac{(\tau - t_0)^k}{k!} d\tau \cdot A^{k+1} x_0 = x_0 + \sum_{k=0}^n \frac{A^{k+1}(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} x_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(A(t - t_0))^k}{k!} x_0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Ponieważ $y_n \xrightarrow{jed} x$, gdzie x jest rozwiązaniem, więc

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0. \quad (4.1.9)$$

Twierdzenie 4.1.3. e^{At} jest rozwiązaniem fundamentalnym $x' = Ax$. ($Y(t, 0) = e^{At}$)

Uwaga 4.1.1. $Y(t, t_0) = Y(t, 0)Y(t_0, 0)^{-1} = e^{tA}e^{-t_0A} = e^{A(t-t_0)}$.

Przypomnienie z analizy: Niech $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciąg funkcji klasy C^1 , taki, że ciągi f_n, f'_n są jednostajnie zbieżne, to $f = \lim f_n$ jest klasy C^1 oraz $f' = \lim f'_n$.

Dowód. Musimy pokazać, że

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \text{ dla dowolnego } t \in \mathbb{R} \quad (4.1.10)$$

Rozważmy ciąg $s_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!}$. Dla dowolnego $a > 0$, na mocy kryterium Weierstrassa s_n jest jednostajnie zbieżny na $[-a, a]$ do e^{At} , ponieważ dla $t \in [-a, a]$ mamy

$$\left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A^k\| a^k}{k!} \text{ oraz } \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\| a^k}{k!} = e^{\|A\|a}.$$

Ponadto

$$s'_n(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = As_{n-1}(t). \quad (4.1.11)$$

Zatem ciąg s'_n jest jednostajnie zbieżny na $[-a, a]$ do funkcji $A \cdot e^{At}$. Zatem $\frac{d}{dt}e^{At} = \lim s'_n(t) = Ae^{At}$ dla $t \in [-a, a]$ dla dowolnego $a > 0$, więc dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

■

Przypomnienie z algebry: Klatka Jordana

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.1.12)$$

Dowolną macierz zespoloną $A \in M_{d \times d}(\mathbb{C})$ można przedstawić w postaci:

$$A = PJP^{-1}, \text{ gdzie } \det P \neq 0 \quad (4.1.13)$$

oraz

$$J = \begin{bmatrix} [J_k1(\lambda_1)] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [J_k2(\lambda_2)] & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [J_{k_r}(\lambda_r)] \end{bmatrix} \quad (4.1.14)$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ są wszystkimi wartościami własnymi macierzy A . Wówczas:

$$A^n = (P \cdot J \cdot P^{-1})^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1} \quad (4.1.15)$$

oraz

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(Jt)^n P^{-1}}{n!} = P \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Jt)^n}{n!} P^{-1} = P e^{Jt} P^{-1}$$

Zatem wystarczy wyznaczyć $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Jt)^n}{n!} = e^{Jt}$. Łatwo sprawdzić, że

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^n & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r^n \end{bmatrix} \quad (4.1.16)$$

Zatem

$$e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} (J_1 t)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_2 t)^n & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (J_r t)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_r t} \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

Stąd wystarczy wyznaczyć: $e^{J_k(\lambda)t}$. Ponieważ $J_k(\lambda) = \lambda \cdot I + K_k$, gdzie

$$K_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = J_k(0),$$

więc $e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{K_k t}$ (ponieważ $I \cdot K_k = K_k \cdot I$). Macierz K_k posiada tę własność, że

$$K_k^n = \begin{matrix} n+1 \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ dla } n \leq k-1 \quad (4.1.18)$$

oraz $K_k^n = 0$ dla $n \geq k$. Zatem

$$e^{tK_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_k^n t^n}{n!} = I + K_k + \frac{t^2}{2} K_k^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} K_k^{k-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ t & 1 & & & & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & & & \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2} & t & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots & \cdots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.19)$$

Stąd

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ t & 1 & & & & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & & & \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2} & t & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots & \cdots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.20)$$

Oraz

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} [e^{J_{k_1}(\lambda_1)t}] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [e^{J_{k_r}(\lambda_r)t}] \end{bmatrix} P^{-1} \quad (4.1.21)$$

Uwaga 4.1.2. 1. Jeśli $\lambda = a + ib$, to $e^{\lambda t} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$.

2. Załóżmy, że $\lambda = a + ib$ jest wartością własną $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$. Zatem jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $\rho(\tau) = \det(A - I\tau)$, który ma współczynniki rzeczywiste. Stąd $\bar{\lambda}$ jest pierwiastkiem ρ z tą samą krotnością co λ .

Wniosek 4.1.4. Niech $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ oraz λ_l ($1 \leq l \leq k$) są jej pierwiastkami rzeczywistymi wielokrotności ν_l , $\alpha_l \pm i\omega_l$ ($1 \leq l \leq s$) są zespolonymi wartościami własnymi o krotnościach μ_l ($\sum_{l=1}^k \nu_l + 2 \sum_{l=1}^s \mu_l = d$). Wówczas dowolne rozwiązanie równania $x' = Ax$ są postaci: $x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))$, gdzie

$$x_j(t) = \sum_{l=1}^k e^{\lambda_l t} p_{l,j}(t) + \sum_{l=1}^s e^{\alpha_l t} (q_{l,j}(t) \cos(\omega_l t) + r_{l,j}(t) \sin(\omega_l t))$$

oraz $p_{l,j}$, $q_{l,j}$, $r_{l,j}$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych stopnia odpowiednio mniejszego od ν_l , μ_l , μ_l .

4.2 Równania liniowe wyższych rzędów

W tej części wykładu będziemy rozważać równania liniowe wyższych rzędów, czyli równania postaci

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t) + p_{k-1}(t)u^{(k-1)}(t) + \dots + p_0(t)u(t) &= f(t) \text{ (RNJ)} \\ u^{(k)}(t) + p_{k-1}(t)u^{(k-1)}(t) + \dots + p_0(t)u(t) &= 0 \text{ (RJ)}, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

gdzie szukaną jest funkcja $u : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^k , zaś danymi są ciągłe $p_0, \dots, p_{k-1}, f : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozważmy (RNJ) z warunkiem początkowym

$$u(t_0) = x_0, \dots, u^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1} \quad (4.2.2)$$

Zredukujmy to równanie do równania pierwszego rzędu, czyli połączmy:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u(t), \quad x_2(t) = u'(t), \dots, \quad x_k(t) = u^{(k-1)}(t), \\ x(t) &= (x_1(t), \dots, x_k(t)). \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= u'(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) &= u''(t) = x_3(t) \\ &\vdots \\ x'_{k-1}(t) &= u^{(k-1)}(t) = x_k(t) \\ x'_k(t) &= u^{(k)}(t) = -p_0(t)x_1(t) - \dots - p_{k-1}(t)x_k(t) + f(t), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

czyli

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad (4.2.4)$$

gdzie

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \dots & -p_{k-1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

oraz $x(t_0) = (x_0, \dots, x_{k-1})$. Ponieważ problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = (x_0, \dots, x_{k-1}) \end{cases}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie oraz $u(t) = x_1(t)$, więc możemy sformułować następujący wniosek.

Wniosek 4.2.1. *Problem (RNJ) z warunkiem początkowym 4.2 posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

Stwierdzenie 4.2.2. 1. *Rozwiązania równania (RJ) tworzą k -wymiarową przestrzeń liniową*

2. *Jeśli $u_0(t)$ jest pewnym szczególnym rozwiązaniem (RNJ) oraz u_1, \dots, u_k tworzą bazę rozwiązań (RJ), to każde rozwiązanie (RNJ) jest postaci $u(t) = u_0(t) + c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)$.*

Dowód. Oznaczmy przez E zbiór rozwiązań (RJ). Łatwo sprawdzić, że E jest przestrzenią liniową. Rozważmy operator liniowy $L : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ postaci:

$$L(u) = (u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(k-1)}(t_0)) \quad (4.2.5)$$

Ze względu na wniosek 4.2.1 L jest odwracalny, więc $\dim E = k$. ■

Przejdźmy teraz do rozważań na temat równań jednorodnych o stałych współczynnikach, czyli równań postaci:

$$u^{(k)}(t) + a_{k-1}u^{(k-1)}(t) + \dots + a_0u(t) = 0. \quad (4.2.6)$$

Aby wyznaczyć bazę rozwiązań tego równania musimy znaleźć wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (4.2.7)$$

czyli pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(-A + \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \lambda + a_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0. \end{aligned}$$

Ostatnią równość udowodnimy indukcyjnie

1° $n = 1$ $\det[a_0 + \lambda] = \lambda^1 + a_0$

2° Załóżmy, że $\det(\lambda I - A_k) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0$. Policzmy

$\det(-A_{k+1} + \lambda I)$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \lambda + a_k \end{bmatrix} \\
 &= (\lambda + a_k) \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} \end{bmatrix} \quad (= (a_{k-1} - \lambda) + \lambda) \\
 &= (\lambda + a_k)\lambda^k + \lambda^k + (a_{k-1} - \lambda)\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda + \dots + a_0 \\
 &= \lambda^{k+1} + a_k\lambda^k + \dots + a_0.
 \end{aligned}$$

Założmy, że λ_l ($1 \leq l \leq s_1$) są wszystkimi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu p z krotnościami ν_l oraz $\alpha_m \pm i\omega_m$ ($1 \leq m \leq s_2$) są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami o krotnościach μ_m . Wówczas $\sum_{l=1}^{s_1} \nu_l + 2 \sum_{m=1}^{s_2} \mu_m = k$. Jeśli przez E oznaczymy przestrzeń rozwiązań równania (4.2.6), to na mocy Wniosku 4.1.4 mamy:

$$\begin{aligned}
 E \subset E' = \text{span}\{t^p e^{\lambda_l t}, t^q e^{\alpha_m t} \cos(\omega_m t), t^r e^{\alpha_m t} \sin(\omega_m t); \\
 1 \leq l \leq s_1, 1 \leq m \leq s_2, 0 \leq p < \nu_l, 0 \leq q, r < \mu_m\}
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Ponadto wiemy, że

$$\dim E' \leq \sum_{l=1}^{s_1} \nu_l + 2 \sum_{m=1}^{s_2} \mu_m = k = \dim E.$$

Wniosek 4.2.3. $E = E'$ oraz

$$t^p e^{\lambda_l t}, t^q e^{\alpha_m t} \cos(\omega_m t), t^r e^{\alpha_m t} \sin(\omega_m t),$$

gdzie $1 \leq l \leq s_1, 1 \leq m \leq s_2, 0 \leq p < \nu_l, 0 \leq q, r < \mu_m$ stanowią bazę rozwiązań układu

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + a_0u = 0.$$

4.3 Liniowe równania różnicowe

Definicja 4.3.1. Liniowym układem różnicowym rzędu q nazywamy równanie postaci

$$(*) \quad a_0 x_k + a_1 x_{k+1} + \dots + a_q x_{k+q} = b_k \text{ dla } k = 0, 1, \dots$$

gdzie $a_0 \neq 0$, $a_q \neq 0$. Dla $b_k = 0$ równanie to nazywać będziemy jednorodnym.

Przy ustalonych warunkach początkowych

$$x_0 = w_0, \dots, x_{q-1} = w_{q-1}$$

istnieje dokładnie jeden ciąg spełniający (*) i warunki początkowe, ponieważ znając x_k, \dots, x_{k+q-1} możemy wyznaczyć x_{k+q}

$$x_{k+q} = \frac{1}{a_q} (b_k - (a_0 x_k + a_1 x_{k+1} + \dots + a_{q-1} x_{k+q-1}))$$

Zajmiemy się rozwiązaniem równanie jednorodnego

$$(**) \quad a_0 x_k + a_1 x_{k+1} + \dots + a_q x_{k+q} = 0.$$

Łatwo pokazać, że zbiór rozwiązań (**) stanowi q -wymiarową przestrzeń liniową. Niech

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^q a_i \lambda^i$$

będzie wielomianem charakterystycznym równania (**)

Twierdzenie 4.3.1. *Jeśli λ_0 jest s -krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to ciągi*

$$\{\lambda_0^n\}, \{n\lambda_0^{n-1}\}, \dots, \{n(n-1)\dots(n-s+2)\lambda_0^{n-s+1}\}$$

stanowią układ liniowo niezależnych rozwiązań (**).

Dowód. Sprawdźmy czy $\{n(n-1)\dots(n-l+2)\lambda_0^{n-l+1}\}$ jest rozwiązaniem (**) dla $l \leq s$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^q a_k x_{k+n} &= \sum_{k=0}^q a_k (n+k)(n+k-1)\dots(n+k-l+2)\lambda_0^{n+k-l+1} \\ &= \frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}} \lambda^n p(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0} = 0 \end{aligned}$$

ponieważ λ_0 jest s -krotnym pierwiastkiem p . Jeśli układ otrzymanych równań stanowiłby układ zależny, to istniały by $c_1, \dots, c_s \neq 0$ takie, że

$$c_1 \lambda_0^n + c_2 n \lambda_0^{n-1} + \dots + c_s n(n-1) \dots (n-s+2) \lambda_0^{n-s+1} = 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wstawiając za n odpowiednio $0, 1, \dots, s-1$ otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{s-1} & (s-1)\lambda_0^{s-2} & (s-1)(s-2)\lambda_0^{s-3} & \dots & (s-1)! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix} = 0.$$

Ponieważ wyznacznik powyższej macierzy jest różny od zera, więc sprzeczność. ■

4.4 Liniowe schematy wielokrokowe

Rozważmy problem Cauchy'ego

$$(*) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Definicja 4.4.1. Liniowym schematem q -krokowym nazywamy schemat postaci

$$(**) \alpha_q x_{k+q} + \alpha_{q-1} x_{k+q-1} + \dots + \alpha_1 x_{k+1} + \alpha_0 x_k = h(\beta_q f_{k+q} + \dots + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k)$$

dla $k = 0, 1, \dots$, gdy $\alpha_q \neq 0$ i $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$. Schemat jest zamknięty, gdy $\beta_q \neq 0$, w przeciwnym wypadku jest otwarty.

Obliczenia numeryczne dla schematu q -krokowego są możliwe, jeśli znane są wartości początkowe x_0, \dots, x_{q-1} . W celu ich uzyskania możemy skorzystać ze schematów jednokrokowych, które są samostartujące.

Oznaczenie. Jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem $(*)$, to wyrażenie

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{j=0}^q \alpha_j x(t_k + jh) - h \sum_{j=0}^q \beta_j f(t_k + jh, x(t_k + jh)) \\ &= \sum_{j=0}^q \alpha_j x(t_k + jh) - h \sum_{j=0}^q \beta_j x'(t_k + jh) \end{aligned}$$

nazywamy błędem lokalnym schematu (**). Schemat (**) jest rzędu p , jeśli $r_k = O(h^{p+1})$ oraz $r_k \neq O(h^{p+2})$.

Założmy, że $x(t)$ jest rozwiązaniem (*) klasy C^∞ . Wówczas dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\begin{aligned} x(t_k + jh) &= \sum_{n=0}^{p+1} \frac{x^{(n)}(t_k)}{n!} (jh)^n + O(h^{p+2}) \\ x'(t_k + jh) &= \sum_{n=1}^{p+1} \frac{x^{(n)}(t_k)}{(n-1)!} (jh)^{n-1} + O(h^{p+1}), \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{j=0}^q \alpha_j \sum_{n=0}^{p+1} \frac{x^{(n)}(t_k)}{n!} (jh)^n - \sum_{j=0}^q \beta_j \sum_{n=1}^{p+1} \frac{x^{(n)}(t_k)}{(n-1)!} j^{n-1} h^n + O(h^{p+2}) = \\ &= \left(\sum_{j=0}^q \alpha_j \right) x(t_k) + \sum_{n=1}^{p+1} \left(\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^q \alpha_j j^n - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^q \beta_j j^{n-1} \right) x^{(n)}(t_k) h^n + O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

Oznaczmy przez

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{j=0}^q \alpha_j \\ c_n &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^q \alpha_j j^n - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^q \beta_j j^{n-1}. \end{aligned}$$

Wniosek 4.4.1. Schemat (**) jest schematem rzędu $p \Leftrightarrow c_0 = \dots = c_p = 0$ oraz $c_{p+1} \neq 0$

Przykład 4.4.1. 1° Ze wzoru Taylora mamy

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) + O(h^3) \\ x(t-h) &= x(t) - hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) + O(h^3). \end{aligned}$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$x(t+h) - x(t-h) = 2hf(t, x(t)) + O(h^3),$$

co prowadzi do schematu

$$x_{k+2} = x_k + 2hf_{k+1}$$

zwanego schematem punktu środkowego, wtedy

$$\alpha_0 = -1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 2.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} c_0 &= \alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\ c_1 &= 2\alpha_2 - \beta_1 = 0 \\ c_2 &= \frac{2^2}{2!}\alpha_2 - \frac{1}{1!}\beta_1 = 0 \\ c_3 &= \frac{2^3}{3!}\alpha_2 - \frac{1}{2!}\beta_1 = \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

zatem schemat jest rzędu 2.

2^o Ważną rodziną schematów wielokrokowych są schematy Adamsa postaci:

$$x_{k+q} = x_{k+q-1} + h \sum_{j=0}^q \beta_j f_{k+j}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.4.2)$$

Jeśli $\beta_q \neq 0$, to jest schematem zamkniętym (Adamsa-Moultona), dla $\beta_q = 0$ jest otwarty (Adamsa-Bashfortha).

Jak wyznaczyć współczynnik β_j ? Możemy skorzystać ze wzoru całkowego

$$x(t_{k+q}) = x(t_{k+q-1}) + \int_{t_{k+q-1}}^{t_{k+q}} f(s, x(s)) ds \quad (4.4.3)$$

Natomiast funkcję podcałkową przybliżamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a P_q stopnia q , opartym na węzłach w punktach t_k, \dots, t_{k+q} , czyli

$$P_q(s) = \sum_{j=0}^q f(t_{k+j}, x(t_{k+j})) l_j(s) \quad \text{gdzie } l_j(s) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^q \frac{s - t_{k+m}}{t_{k+j} - t_{k+m}}. \quad (4.4.4)$$

Uwaga 4.4.1.

$$P_q(t_s) = f(t_s, x(t_s)) \quad \text{dla } s = k, \dots, k+q. \quad (4.4.5)$$

Zatem

$$x(t_{k+q}) \approx x(t_{k+q-1}) + h \sum_{j=0}^q \left(\frac{1}{h} \int_{t_{k+q-1}}^{t_{k+q}} l_j(s) ds \right) f(t_{k+j}, x(t_{k+j})), \quad (4.4.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{t_{k+q-1}}^{t_{k+q}} l_j(s) ds &= \frac{1}{h} \int_{t_{k+(q-1)h}}^{t_{k+qh}} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^q \frac{s - t_k - mh}{t_k + jh - t_k - mh} ds \\ &= \int_{q-1}^q \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^q \frac{s - m}{j - m} ds = \beta_j, \end{aligned}$$

co prowadzi do zamkniętego schematu Adamsa

$$x_{k+q} = x_{k+q-1} + h \sum_{j=0}^q \beta_j f_{k+j}.$$

Policzmy rząd tego schematu. Oznaczmy

$$W_n(s) = \sum_{j=0}^q \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^q \frac{s - m}{j - m} j^n \quad (4.4.7)$$

W_n jest wielomianem stopnia $\leq q$. Pokażemy, że $W_n(s) = s^n$ dla $n = 0, \dots, q$. Aby udowodnić tę równość wystarczy ją sprawdzić w $q+1$ różnych punktach, np. w $0, 1, \dots, q$. Jeśli $k = 0, 1, \dots, q$, to

$$W_n(k) = \sum_{j=0}^q \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^q \frac{j - m}{k - m} j^n = k^n.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^q \alpha_j j^n - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^q \beta_j j^{n-1} \\ &= \frac{1}{n!} (q^n - (q-1)^n) - \frac{1}{(n-1)!} \int_{q-1}^q W_{n-1}(s) ds \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{q-1}^q (s^{n-1} - W_{n-1}(s)) ds. \end{aligned}$$

Czyli $c_n = 0$ dla $n = 1, \dots, q+1$ oraz $c_0 = 1-1 = 0$. Ponadto wielomian $s^{q+1} - W_{q+1}(s)$ jest wielomianem stopnia $q+1$, a jego pierwiastkami są $0, 1, \dots, q$. Stąd

$$s^{q+1} - W_{q+1}(s) = s(s-1)\dots(s-q). \quad (4.4.8)$$

Zatem

$$\begin{aligned} c_{q+2} &= \frac{1}{(q+1)!} \int_{q-1}^q (s^{q+1} - W_{q+1}(s)) ds \\ &= \int_{q-1}^q \frac{s(s-1)\dots(s-q)}{(q+1)!} ds < 0. \end{aligned}$$

Czyli rząd zamkniętego q -krokowego schematu Adamsa wynosi $q+1$.

Definicja 4.4.2. Mówimy, że schemat q -krokowy $(**)$ jest zbieżny, gdy dla dowolnego $t \in [t_0, T]$, jeśli:

1^o $t = t_0 + kh$, $k \rightarrow +\infty, h \rightarrow 0$,

2^o $x_j(h) \rightarrow x_0$ gdy $h \rightarrow 0$ dla $j = 0, \dots, q-1$,

to $x_k \rightarrow x(t)$, gdzie $x(t)$ jest rozwiązaniem $(*)$, natomiast $x_0(h), \dots, x_{q-1}(h)$ są danymi startowymi schematu.

Lemat 4.4.2. Jeśli liniowy schemat q -krokowy $(**)$ jest zbieżny, to wszystkie pierwiastki wielomianu $g(\lambda) = \sum_{j=0}^q \alpha_j \lambda^j$ leżą w kole jednostkowym $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, zaś te pierwiastki, które leżą na okręgu jednostkowym $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, są jednokrotne.

Dowód. Rozważmy równanie $x'(t) = 0, x(0) = 0$. Oczywiście posiada ono jedyne rozwiązanie $x(t) = 0$. W tym przypadku schemat $(**)$ jest postaci:

$$\alpha_q x_{k+q} + \alpha_{q-1} x_{k+q-1} + \dots + \alpha_1 x_{k+1} + \alpha_0 x_k = 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots$$

Niech λ_0 będzie pierwiastkiem g . Rozważmy wówczas dane startowe postaci $x_j(h) = h\lambda_0^j$ dla $j = 0, \dots, q-1$. Wówczas $x_k = h\lambda_0^k$ dla dowolnego k . Jeśli $t = kh$, to $x_k = \frac{t}{k}\lambda_0^k$. Jeśli dodatkowo $|\lambda_0| > 1$, to $|x_k| = t \frac{|\lambda_0|^k}{k} \rightarrow +\infty$, co przeczy założeniu zbieżności, czyli $x_k \rightarrow 0$. Stąd $|\lambda_0| \leq 1$. Następnie założymy, że $|\lambda_0| = 1$ oraz λ_0 jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu g . Wówczas rozważmy dane startowe $x_j(h) = h^j \lambda_0^{j-1}$ dla $j = 0, \dots, q-1$. Wówczas $x_k = hk\lambda_0^{k-1}$ dla dowolnego k . Jeśli $t = hk$, to $|x_k| = |t\lambda_0^{k-1}| = t$, co przeczy założeniu zbieżności schematu. ■

Definicja 4.4.3. Mówimy, że schemat $(**)$ jest stabilny, jeśli wszystkie pierwiastki g znajdują się w kole jednostkowym, zaś te pierwiastki, które leżą na okręgu jednostkowym są jednokrotne.

Przykład 4.4.2.

1° Schemat punktu środkowego: $g(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

2° Schemat Adamsa: $g(\lambda) = \lambda^q - \lambda^{q-1} = (\lambda - 1)\lambda^{q-1}$

Definicja 4.4.4. Mówimy, że schemat $(**)$ jest zgodny, jeśli

$$\begin{aligned} 0 = c_0 &= \alpha_0 + \dots + \alpha_q \\ 0 = c_1 &= 1\alpha_1 + \dots + q\alpha_q - (\beta_0 + \dots + \beta_q). \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

W najbliższym czasie udowodnimy twierdzenie, które mówi, że jeśli liniowy schemat wielokrokowy jest zgodny i stabilny, to jest zbieżny. Najpierw jednak musimy przypomnieć sobie pewne twierdzenia dotyczące funkcji analitycznych.

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym.

Definicja 4.4.5. Mówimy, że funkcja f posiada pochodną (zespoloną) w $z_0 \in D$, jeśli istnieje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4.4.10)$$

i oznaczamy ją przez $f'(z_0)$. Mówimy, że funkcja f jest analityczna, jeśli posiada pochodną w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie 4.4.3. *Jeśli $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ jest analityczna, to w każdym punkcie posiada pochodną dowolnego rzędu.*

Oznaczenie. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją analityczną oraz $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ będzie krzywą klasy C^1 . Wówczas oznaczmy

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Ponadto, dla dowolnego $r > 0$ oznaczmy przez $O(0, r)$ krzywą postaci $[0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 4.4.4. *Jeśli $f : \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ jest analityczna, to*

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h,$$

gdzie $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{O(0,r)} f(z) z^{-n} dz$ dla dowolnego $0 < r < R$

Oznaczenie. Dla dowolnego wielomianu $g(\lambda) = \alpha_q \lambda^q + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ oznaczmy

$$\hat{g}(\lambda) = \lambda^q g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha_q + \alpha_{q-1} \lambda + \dots + \alpha_1 \lambda^{q-1} + \alpha_0 \lambda^q \quad (4.4.11)$$

Lemat 4.4.5. *Załóżmy, że wielomian $g(\lambda) = \alpha_q \lambda^q + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ spełnia warunek stabilności. Wówczas*

$$\frac{1}{\alpha_q + \alpha_{q-1} \lambda + \dots + \alpha_0 \lambda^q} = \frac{1}{\hat{g}(\lambda)} = \gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \dots$$

dla $|\lambda| < 1$, gdzie γ_j są rzeczywiste i wspólnie ograniczone, czyli

$$|\gamma_j| \leq \Gamma \text{ dla } j = 0, 1, 2, \dots$$

Dowód. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ będą wszystkimi pierwiastkami g z okręgu jednostkowego, czyli $|\lambda_j| = 1$. Wówczas:

$$g(z) = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_r) w(z),$$

przy czym wszystkie pierwiastki w leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. Ponadto

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{g}(z)} &= \frac{1}{z^q g\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^q \left(\frac{1}{z} - \lambda_1\right) \dots \left(\frac{1}{z} - \lambda_r\right) w\left(\frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{(-1)^r}{\lambda_1 \dots \lambda_r \left(z - \frac{1}{\lambda_1}\right) \dots \left(z - \frac{1}{\lambda_r}\right) \hat{w}(z)} \\ &= \frac{a_1}{z - \frac{1}{\lambda_1}} + \dots + \frac{a_r}{z - \frac{1}{\lambda_r}} + \frac{v(z)}{\hat{w}(z)}. \end{aligned}$$

Ponieważ moduły wszystkich pierwiastków \hat{w} są większe niż 1, funkcja $f(z) = \frac{v(z)}{\hat{w}(z)}$ jest analityczna w kole $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1 + \varepsilon\}$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Zatem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ dla } |z| \leq 1,$$

gdzie

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{O(0,1)} f(z) z^{-n} dz.$$

Stąd $|b_n| \leq \max_{|z| \leq 1} |f(z)|$. Następnie dla $|z| < 1$ mamy $|\lambda_j z| < 1$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{a_j}{z - \frac{1}{\lambda_j}} &= -a_j \lambda_j \frac{1}{1 - \lambda_j z} = -a_j \lambda_j (1 + \lambda_j z + \lambda_j^2 z^2 + \dots) \\ &= b_{0j} + b_{1j} z + b_{2j} z^2 + \dots, \end{aligned}$$

gdzie $|b_{kj}| = |a_j|$. Zatem

$$\frac{1}{\hat{g}(z)} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots \quad \text{dla } |z| < 1$$

gdzie $\gamma_k = b_k - \sum_{j=1}^r b_{kj}$ oraz

$$|\gamma_k| \leq \max_{|z| < 1} |f(z)| + \sum_{j=1}^r |a_j| =: \Gamma \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots$$

■

Wniosek 4.4.6. Dla γ_j z poprzedniego lematu zachodzi związek

$$\sum_{k=0}^q \alpha_k \gamma_{l-q+k} = \begin{cases} 1 & \text{gdym } l = 0 \Leftrightarrow \alpha_q \gamma_0 = 1 \\ 0 & \text{gdym } l \neq 0, \end{cases}$$

gdzie $\gamma_l = 0$ dla $l < 0$.

Dowód.

$$\begin{aligned} 1 &= \hat{g}(\lambda) \frac{1}{\hat{g}(\lambda)} = \left(\sum_{k=0}^q \lambda^k \alpha_{q-k} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n \lambda^n) \\ &= \sum_{k=0}^q \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{q-k} \gamma_n \lambda^{n+k} = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \sum_{k=0}^q \alpha_{q-k} \gamma_{l-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \sum_{k=0}^q \alpha_k \gamma_{l-q+k}. \end{aligned}$$

Ze względu na jednoznaczność rozwinięcia w szereg potęgowy otrzymujemy tezę wniosku.

■

Lemat 4.4.7. *Rozważmy nieliniowe równanie różnicowe postaci*

$$(***) \sum_{j=0}^q \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^q \beta_{j,k}(y_{k+j}) + g_k \quad (4.4.12)$$

gdzie

$$1^\circ \sum_{j=0}^q |\alpha_j| \leq a,$$

$$2^\circ \max_{0 \leq i \leq q} |\beta_{i,k}(y)| \leq b|y|,$$

$$3^\circ |g_k| \leq \mu \text{ dla } k = 0, 1, \dots,$$

$$4^\circ g(\lambda) = \sum_{j=0}^q \alpha_j \lambda^j \text{ spełnia warunek stabilności,}$$

$$5^\circ \text{ warunki początkowe } \{y_j\}_{j=0}^{q-1} \text{ są ograniczone przez } \eta, \text{ czyli } |y_j| \leq \eta \text{ dla } j = 0, \dots, q-1,$$

$$6^\circ 0 < h < \frac{|\alpha_q|}{b}.$$

Wówczas dla dowolnego naturalnego N rozwiązanie $(***) \{y_k\}_{k=0}^N$ spełnia warunek

$$|y_k| \leq M e^{khL},$$

gdzie

$$M = \frac{\Gamma}{1 - \frac{hb}{|\alpha_q|}} (\mu N + aq\eta), \quad L = \frac{\Gamma}{1 - \frac{hb}{|\alpha_q|}} qb$$

oraz Γ jest stałą z poprzedniego lematu.

Dowód. Niech $\{\gamma_j\}_{j=0}^\infty$ będą współczynnikami z poprzedniego lematu. Weźmy $q \leq k \leq N$ oraz $0 \leq l \leq k - q$. Następnie równanie $(***)$ o numerze $k - q - l$ przemnożmy przez γ_l i wysumujmy je dla $l = 0, 1, \dots, k - q$. Wtedy

$$\sum_{l=0}^{k-q} \gamma_l \sum_{j=0}^q (\alpha_j y_{k-q-l+j} - h \beta_{j,k-q-l}(y_{k-q-l+j})) = \sum_{l=0}^{k-q} \gamma_l g_{k-q-l}.$$

Podstawmy $s = k - q - l + j$. Wówczas s zmienia się od $k - q - l$ do $k - l$

$$\sum_{l=0}^{k-q} \sum_{s=k-q-l}^{k-l} \gamma_l (\alpha_{s-k+q+l} y_s - h \beta_{s-k+q+l, k-q-l}(y_s)) = \sum_{l=0}^{k-q} \gamma_l g_{k-q-l}.$$

Sumujemy więc po zbiorze par (l, s) takich, że

$$\begin{aligned}
0 &\leq l \leq k - q \wedge k - l - q \leq s \leq k - l \\
&\Leftrightarrow 0 \leq l \leq k - q \wedge k - q \leq s + l \leq k \\
&\Leftrightarrow 0 \leq s \leq k \wedge 0 \leq l \leq k - q \wedge k - q \leq s + l \leq k \\
&\Leftrightarrow 0 \leq s \leq k \wedge 0 \leq l \leq k - q \wedge k - q - s \leq l \leq k - s \\
&\Leftrightarrow 0 \leq s \leq k \wedge \max(0, k - s - q) \leq l \leq \min(k - q, k - s).
\end{aligned}$$

Czyli

$$\sum_{s=0}^k \sum_{l=\max(0, k-s-q)}^{\min(k-q, k-s)} \gamma_l (\alpha_{s-k+q+l} y_s - h \beta_{s-k+q+l, k-q-l}(y_s)) = \sum_{l=0}^{k-q} \gamma_l g_{k-q-l}$$

Podstawmy $i = s - k + q + l$, wtedy

$$\sum_{s=0}^k \sum_{i=\max(s-k+q, 0)}^{\min(s, q)} \gamma_{i-s+k-q} (\alpha_i y_s - h \beta_{i, s-i}(y_s)) = \sum_{l=0}^{k-q} \gamma_l g_{k-q-l}$$

Oznaczmy przez

$$c_s = \sum_{i=\max(s-k+q, 0)}^{\min(s, q)} \alpha_i \gamma_{i-s+k-q}$$

Jeśli $q \leq s \leq k$, to

$$c_s = \sum_{i=0}^q \alpha_i \gamma_{i-s+k-q} = \begin{cases} 1 & s = k \\ 0 & s < k. \end{cases}$$

Jeśli $0 \leq s < q$, to

$$|c_s| \leq \sum_{i=0}^q |\alpha_i| |\gamma_{i-s+k-q}| \leq a\Gamma,$$

stąd

$$y_k + \sum_{s=0}^{q-1} c_s y_s = h \sum_{s=0}^k \sum_{i=\max(s-k+q, 0)}^{\min(s, q)} \gamma_{i-s+k-q} \beta_{i, s-i}(y_s) + \sum_{l=0}^{k-q} \gamma_l g_{k-q-l}$$

czyli

$$y_k - h \gamma_0 \beta_{q, k-q}(y_k) = - \sum_{s=0}^{q-1} c_s y_s + h \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{i=\max(s-k+q, 0)}^{\min(s, q)} \gamma_{i-s+k-q} \beta_{i, s-i}(y_s) + \sum_{l=0}^{k-q} \gamma_l g_{k-q-l}$$

zatem

$$|y_k|(1 - h|\gamma_0|b) \leq qa\Gamma\eta + h \sum_{s=0}^{k-1} q\Gamma b|y_s| + N\Gamma\mu.$$

Ponieważ $\gamma_0\alpha_q = 1$, więc

$$|y_k| \leq hL \sum_{s=0}^{k-1} |y_s| + M,$$

gdzie

$$M = \frac{\Gamma}{1 - \frac{hb}{|\alpha_q|}}(\mu N + aq\eta), \quad L = \frac{\Gamma}{1 - \frac{hb}{|\alpha_q|}}qb.$$

Teraz udowodnimy, że

$$|y_k| \leq M(1 + hL)^k \text{ dla } k = 0, 1, \dots, N.$$

Najpierw pokażemy, że:

$$|y_k| \leq \eta \leq M \text{ dla } k = 0, 1, \dots, q - 1.$$

Ze względu na to, że

$$0 < 1 - \frac{hb}{|\alpha_q|} \leq 1$$

otrzymujemy

$$M = \frac{\Gamma}{1 - \frac{hb}{|\alpha_q|}}(\mu N + aq\eta) \geq \Gamma(\mu N + aq\eta) \geq \Gamma qa\eta \geq \Gamma a\eta,$$

ponadto

$$a\Gamma \geq \sum_{j=0}^q |\alpha_j\gamma_0| \geq |\alpha_q\gamma_0| = 1,$$

stąd

$$M \geq \eta.$$

Dla $q \leq k \leq N$ nierówność $|y_k| \leq M(1 + hL)^k$ udowodnimy za pomocą indukcji. Załóżmy, że dla $m < k$ zachodzi $|y_m| \leq M(1 + hL)^m$. Wówczas

$$\begin{aligned} |y_k| &\leq hL \sum_{s=0}^{k-1} |y_s| + M \leq hLM \sum_{s=0}^{k-1} (1 + hL)^s + M \\ &= hLM \frac{(1 + hL)^k - 1}{hL} + M = M(1 + hL)^k, \end{aligned}$$

Zatem dla $0 \leq k \leq N$ otrzymujemy

$$|y_k| \leq M(1 + hL)^k \leq Me^{hLk}$$

■

Twierdzenie 4.4.8. *Jeśli liniowy schemat wielokrokowy jest zgodny i stabilny, to jest zbieżny.*

Dowód. Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem (*). Wówczas

$$\begin{aligned} x(t_k + jh) &= x(t_k) + jhx'(t_k) + jh(x'(t_k + \theta_jjh) - x'(t_k)) \\ x'(t_k + jh) &= x'(t_k) + (x'(t_k + jh) - x'(t_k)), \end{aligned}$$

gdzie $0 \leq \theta_j(h) = \theta_j \leq 1$. Zatem

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{j=0}^q \alpha_j x(t_k + jh) - h \sum_{j=0}^q \beta_j f(t_k + jh, x(t_k + jh)) \\ &= \sum_{j=0}^q \alpha_j x(t_k + jh) - h \sum_{j=0}^q \beta_j x'(t_k + jh) \\ &= \sum_{j=0}^q \alpha_j x(t_k) + h \sum_{j=0}^q j \alpha_j x'(t_k) - h \sum_{j=0}^q \beta_j x'(t_k) + h \sum_{j=0}^q j \alpha_j (x'(t_k + jh\theta_j) - x'(t_k)) \\ &\quad - h \sum_{j=0}^q \beta_j (x'(t_k + jh) - x'(t_k)) \\ &= c_0 x(t_k) + hc_1 x'(t_k) + h\varepsilon_k(h) = h\varepsilon_k(h), \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_k(h) = \sum_{j=0}^q j \alpha_j (x'(t_k + jh\theta_j) - x'(t_k)) - \sum_{j=0}^q \beta_j (x'(t_k + jh) - x'(t_k)).$$

Niech

$$\varepsilon(h) = \sum_{j=0}^q (j|\alpha_j| + |\beta_j|) \sup_{\substack{t, t' \in [t_0, T] \\ |t-t'| \leq qh \\ x, x' \in B(0, R) \\ |x-x'| \leq \mathcal{M}qh}} |f(t, x) - f(t', x')|,$$

gdzie $R := |x_0| + \mathcal{M}(T - t_0)$ oraz $\mathcal{M} := \sup |f(t, x)|$. Ponieważ $f : [t_0, T] \times B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, więc $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$. Ponadto, ponieważ x jest rozwiązaniem (*), więc $x(t) \in B(0, R)$ oraz $|x(t) - x(t')| \leq \mathcal{M}|t - t'|$. Stąd $|\varepsilon_k(h)| \leq \varepsilon(h)$. Niech $0 \leq k \leq N = \frac{T-t_0}{h}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^q (\alpha_j x(t_{k+j}) - h\beta_j f(t_{k+j}, x(t_{k+j}))) &= h\varepsilon_k(h) \\ \sum_{j=0}^q (\alpha_j x_{k+j} - h\beta_j f(t_{k+j}, x_{k+j})) &= 0. \end{aligned}$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^q (\alpha_j e_{k+j} - h\beta_j (f(t_{k+j}, x(t_{k+j})) - f(t_{k+j}, x_{k+j}))) = h\varepsilon_k(h).$$

Niech $\beta_{j,k}(y) = \beta_j(f(t_{k+j}, y - x_{k+j}) - f(t_{k+j}, x_{k+j}))$. Wówczas $|\beta_{j,k}(y)| \leq b|y|$, gdzie $b = \mathcal{L} \max_{0 \leq j \leq q} |\beta_j|$ oraz \mathcal{L} jest stałą Lipschitza funkcji f . Ponadto

$$\sum_{j=0}^q (\alpha_j e_{k+j} - h\beta_{j,k}(e_{k+j})) = h\varepsilon_k(h).$$

Weźmy h na tyle małe, aby $1/2 < 1 - \frac{hb}{|\alpha_q|} < 1$ oraz niech $\eta := \max_{0 \leq j < q} |e_j|$, $\mu = h\varepsilon(h)$. Na mocy poprzedniego lematu dla $0 \leq k \leq N = \frac{T-t_0}{h}$ mamy

$$|e_k| \leq M e^{hkL} \leq M e^{(T-t_0)L}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Gamma}{1 - \frac{hb}{|\alpha_q|}} (\mu N + aq\eta) \leq 2\Gamma((T - t_0)\varepsilon(h) + aq\eta) \\ L &= \frac{\Gamma}{1 - \frac{hb}{|\alpha_q|}} qb \leq 2\Gamma qb. \end{aligned}$$

Stąd $e_k = 0(\varepsilon(h)) + 0(\eta)$, zatem $e_k \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$ oraz $\eta \rightarrow 0$. ■

Wniosek 4.4.9. *Jeśli schemat (**) jest zgodny, stabilny rzędu p , to*

$$|e_k| = O(h^p) + O(\eta)$$

Dowód. Z dowodu poprzedniego twierdzenia mamy

$$|h\varepsilon_k(h)| = |r_k(h)| \leq ch^{p+1}.$$

Zatem

$$|\varepsilon_k(h)| \leq ch^p.$$

Stąd zamiast $\varepsilon(h)$ możemy wstawić ch^p . Wówczas

$$|e_k| \leq 2\Gamma((T - t_0)ch^p + aq\eta)e^{(T-t_0)2\Gamma qb}.$$

■

5 Zależności rozwiązań od warunków początkowych

Twierdzenie 5.0.10. *(O ciągłej zależności od warunków początkowych)*
 Niech $f : [t_0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($G \subset \mathbb{R}^d$ otwarty) będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek Lipschitza ze względu na x . Wówczas odwzorowanie $\phi : G \rightarrow C([t_0, T], G)$, gdzie $\phi(x_0)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{dla } t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

jest Lipschitza.

Dowód. Niech $t \in [t_0, T]$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1)(t) - \phi(x_2)(t)\| &= \left\| x_1 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(x_1)(\tau)) d\tau - x_2 - \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(x_2)(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^t \|f(\tau, \phi(x_1)(\tau)) - f(\tau, \phi(x_2)(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^t L \|\phi(x_1)(\tau) - \phi(x_2)(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Na mocy lematu Gronwalla (2.1.1) otrzymujemy:

$$\|\phi(x_1)(t) - \phi(x_2)(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{\int_{t_0}^t L d\tau} = \|x_1 - x_2\| e^{(T-t_0)L},$$

stąd

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\|_{\text{sup}} \leq \|x_1 - x_2\| e^{(T-t_0)L}.$$

■

Uwaga 5.0.2. Niech $\varphi(t, x_0) = \phi(x_0)(t)$ tzn. $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Wówczas $\varphi : [t_0, T] \times G \rightarrow G$ jest ciągła. Ustalmy $(t_1, x_1) \in [t_0, T] \times G$. Ponieważ $t \mapsto \varphi(t, x_1)$ jest różniczkowalna (zatem ciągła), więc dla dowolnego

5 ZALEŻNOŚCI ROZWIĄZAŃ OD WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH 68

$\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $|t - t_1| \leq \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x_1) - \varphi(t_1, x_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Założmy, że

$$|t - t_1| \leq \delta \text{ oraz } \|x - x_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2e^{L(T-t_0)}}.$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x) - \varphi(t_1, x_1)\| &\leq \|\varphi(t, x) - \varphi(t, x_1)\| + \|\varphi(t, x_1) - \varphi(t_1, x_1)\| \\ &\leq e^{L(T-t_0)} \|x - x_1\| + \|\varphi(t, x_1) - \varphi(t_1, x_1)\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.0.11. Niech $f : [t_0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($G \subset \mathbb{R}^d$ domknięcie zbioru otwartego) będzie funkcją ograniczoną klasy C^1 . Niech $\varphi : [t_0, T] \times G \rightarrow G$ będzie odwzorowanie takim, że $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Wówczas odwzorowanie φ jest ciągłe.

Dowód. Założmy, że $\|f(t, x)\| \leq M$ dla $(t, x) \in [t_0, T] \times G$. Wówczas dla dowolnych $(t, x) \in [t_0, T] \times G$ mamy

$$\|\varphi(t, x) - x\| = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, x)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi(\tau, x))\| d\tau \leq M(T - t_0).$$

Niech $R = M(T - t_0) + 1$ oraz ustalmy $(t_1, x_1) \in [t_0, T] \times G$. Ponieważ, $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ograniczona na $[t_0, T] \times B(x_1, R) \cap G$, więc $f : [t_0, T] \times (B(x_1, R) \cap G) \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest funkcją Lipschitza ze stałą L . Jeśli $\|x - x_1\| < 1$, to $\varphi(t, x) \in B(x_1, R) \cap G$, stąd

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x) - \varphi(t, x_1)\| &\leq \|x - x_1\| + \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi(\tau, x)) - f(\tau, \varphi(\tau, x_1))\| d\tau \\ &\leq \|x - x_1\| + \int_{t_0}^t L \|\varphi(\tau, x) - \varphi(\tau, x_1)\| d\tau. \end{aligned}$$

Na mocy lematu Gronwalla (2.1.1) otrzymujemy:

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, x_1)\| \leq \|x - x_1\| e^{(T-t_0)L}.$$

Dalsza część dowodu przebiega jak w Uwadze poprzedzającej twierdzenie. ■

5 ZALEŻNOŚCI ROZWIĄZAŃ OD WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH 69

Prawdziwa jest również wersja tego twierdzenia bez założenia ograniczoności f , podamy ją bez dowodu.

Twierdzenie 5.0.12. *Niech $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie funkcją klasy C^1 . Niech $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie odwzorowanie takim, że $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Wówczas odwzorowanie φ jest ciągłe.

Wniosek 5.0.13. *(o ciągłej zależności warunków początkowych i parametru) Niech $M \subset \mathbb{R}^d$ będzie domknięciem zbioru otwartego. Niech $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times M \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie funkcją ograniczoną klasy C^1 . Niech $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times M \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie odwzorowanie takim, że $t \mapsto \varphi(t, x_0, y)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Wówczas odwzorowanie φ jest ciągłe.

Dowód. Rozważmy funkcję $F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times M \rightarrow \mathbb{R}^d \times M$ postaci

$$F(t, x, y) = (f(t, x, y), 0).$$

Funkcja F jest również ograniczona i klasy C^1 . Zatem na mocy Twierdzenia 5.0.11, jeśli przez $t \mapsto \Phi(t, x_0, y_0)$ oznaczymy rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(t, x(t), y(t)) = (f(t, x(t), y(t)), 0) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0), \end{cases}$$

to Φ jest ciągła. Ponadto, $y'(t) = 0$, więc $y(t) = y_0$ oraz $x'(t) = f(t, x(t), y_0)$. Zatem $\Phi(t, x_0, y_0) = (\varphi(t, x_0, y_0), y_0)$. Stąd φ jest również ciągła. ■

Twierdzenie 5.0.14. *(o ciągłej zależności od parametru dla równań liniowych) Niech $M \subset \mathbb{R}^d$. Niech $A : [t_0, T] \times M \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ będzie funkcją ciągłą.*

5 ZALEŻNOŚCI ROZWIĄZAŃ OD WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH 70

Niech $\varphi : [t_0, T] \times M \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie odwzorowaniem takim, że $t \mapsto \varphi(t, y)$ jest rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\begin{cases} x'(t) = A(t, y)x(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Wówczas $\varphi : [t_0, T] \times M \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest ciągła.

Dowód. Ustalmy $y_1 \in M$. Ponieważ $A : [t_0, T] \times B(y_1, 1) \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ jest jednostajnie ciągła, więc istnieje $A > 0$ takie, że $\|A(t, y)\| \leq A$ dla $(t, y) \in [t_0, T] \times B(y_1, 1)$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|y - y_1\| < \delta \Rightarrow \|A(t, y) - A(t, y_1)\| < \varepsilon.$$

Stąd dla dowolnego $(t, y) \in [t_0, T] \times B(y_1, 1)$ mamy

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, y)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau, y)\varphi(\tau, y) d\tau \right\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|A(\tau, y)\varphi(\tau, y)\| d\tau \\ &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t A \|\varphi(\tau, y)\| d\tau. \end{aligned}$$

Zatem na mocy lematu Gronwalla (2.1.1) otrzymujemy

$$\|\varphi(t, y)\| \leq \|x_0\| e^{(T-t_0)A}.$$

Założmy że $\|y - y_1\| \leq \delta$. Wówczas

$$\begin{aligned} &\|\varphi(t, y) - \varphi(t, y_1)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (A(\tau, y)\varphi(\tau, y) - A(\tau, y_1)\varphi(\tau, y_1)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(\tau, y)(\varphi(\tau, y) - \varphi(\tau, y_1))\| d\tau + \int_{t_0}^t \|(A(\tau, y_1) - A(\tau, y))\varphi(\tau, y_1)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t A \|\varphi(\tau, y) - \varphi(\tau, y_1)\| d\tau + \varepsilon(T - t_0) \|x_0\| e^{A(T-t_0)}. \end{aligned}$$

Zatem na mocy lematu Gronwalla (2.1.1)

$$\|\varphi(t, y) - \varphi(t, y_1)\| \leq \varepsilon(T - t_0) \|x_0\| e^{2A(T-t_0)}.$$

Jeśli dodatkowo $|t - t_1| < \varepsilon$, to

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, y_1) - \varphi(t_1, y_1)\| &\leq \left| \int_t^{t_1} \|A(\tau, y_1)\varphi(\tau, y_1)\| d\tau \right| \leq |t - t_1| A \|x_0\| e^{(T-t_0)A} \\ &\leq \varepsilon A \|x_0\| e^{2(T-t_0)A}. \end{aligned}$$

5 ZALEŻNOŚCI ROZWIĄZAŃ OD WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH 71

Stąd

$$\|\varphi(t, y) - \varphi(t_1, y_1)\| \leq \varepsilon(A + T - t_0) \|x_0\| e^{2(T-t_0)A}.$$

■

Lemat 5.0.15. (*Hadamarda*)

Niech K będzie otwartym i wypukłym podzbiorem \mathbb{R}^d oraz $f : (a, b) \times K \rightarrow \mathbb{R}^d$ funkcją klasy C^1 . Wówczas odwzorowanie $\tilde{f}_k : (a, b) \times K \times K \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 1, \dots, d$ dane wzorem:

$$\tilde{f}_k(t, y_1, y_2) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, sy_2 + (1-s)y_1) ds \quad (5.0.13)$$

jest ciągle, $\tilde{f}_k(t, y, y) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, y)$ oraz

$$f(t, y_2) - f(t, y_1) = \sum_{k=1}^d \tilde{f}_k(t, y_1, y_2)(y_2^k - y_1^k) \quad (5.0.14)$$

gdzie $y_i = (y_i^1, \dots, y_i^d)$, $i = 1, 2$.

Dowód. Ciągłość zostawiamy jako ćwiczenie. Ustalmy $t \in (a, b)$ i rozważmy

$$F(s) = f(t, sy_2 + (1-s)y_1) \text{ dla } s \in [0, 1].$$

Wówczas

$$F'(s) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, sy_2 + (1-s)y_1)(y_2^k - y_1^k),$$

stąd

$$\begin{aligned} f(t, y_2) - f(t, y_1) &= F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds \\ &= \sum_{k=1}^d \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, sy_2 + (1-s)y_1) ds (y_2^k - y_1^k). \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 5.0.16. (*o C^1 zależności od warunków początkowych*) Niech $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie funkcją klasy C^1 (ograniczona). Niech $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ będzie rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

5 ZALEŻNOŚCI ROZWIĄZAŃ OD WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH 72

Wówczas $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest klasy C^1 oraz dla dowolnego $\vec{n} \in \mathbb{R}^d$, $\|\vec{n}\| = 1$ funkcja

$$z(t, x) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \varphi(t, x)$$

jest rozwiązaniem równania liniowego:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t, x) &= \mathcal{I}(t, x) z(t, x) \\ z(t_0, x) &= \vec{n} \end{cases} \quad (5.0.15)$$

gdzie $\mathcal{I}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x))$

Dowód. Dla uproszczenia dowodu przyjmijmy, że $t_0 = 0$. Ponieważ $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = f(t, \varphi(t, x))$ oraz φ jest funkcją ciągłą na mocy Twierdzenia 5.0.12, więc pochodna cząstkowa $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ jest ciągła. Należy również pokazać, że pochodna $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ jest ciągła. W tym celu wystarczy udowodnić, że dla dowolnego wektora $\vec{n} \in \mathbb{R}^d$, $\|\vec{n}\| = 1$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}$ jest ciągła. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $h \in [0, 1]$ oraz oznaczmy

$$y_h(t) = \varphi(t, x_0 + h\vec{n}).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} y'_h(t) - y'_0(t) &= f(t, y_h(t)) - f(t, y_0(t)) = \sum_{k=1}^n \tilde{f}_k(t, y_h(t), y_0(t)) (y_h^k(t) - y_0^k(t)) \\ &= \mathcal{I}(t, h) (y_h(t) - y_0(t)), \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{I}(t, h)$ jest $d \times d$ macierzą, której kolumnami są wektory $f_k(t, y_h(t), y_0(t))$, czyli

$$\mathcal{I}(t, h) = [f_1(t, y_h(t), y_0(t)) \dots f_d(t, y_h(t), y_0(t))].$$

Na mocy Lematu Hadamarda \mathcal{I} jest ciągła. Ponadto

$$\left(\frac{y_h(t) - y_0(t)}{h} \right)' = \mathcal{I}(t, h) \left(\frac{y_h(t) - y_0(t)}{h} \right).$$

Oznaczając $z_h(t) = \frac{y_h(t) - y_0(t)}{h}$ mamy

$$z'_h(t) = \mathcal{I}(t, h) z_h(t)$$

5 ZALEŻNOŚCI ROZWIĄZAŃ OD WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH 73

Gdy $h \rightarrow 0$, to

$$f_k(t, y_h(t), y_0(t)) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, y_0(t)),$$

Czyli

$$\mathcal{I}(t, h) \rightarrow \mathcal{I}(t, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x_0))$$

oraz

$$z_h(0) = \frac{y_h(0) - y_0(0)}{h} = \vec{n}.$$

Zatem

$$\begin{cases} z'_h(t) &= \mathcal{I}(t, h)z_h(t) \\ z_h(0) &= \vec{n} \end{cases}$$

Na mocy twierdzenia o ciągłej zależności od parametru dla równań liniowych otrzymujemy, że $z_h(t) \rightarrow_{h \rightarrow 0} z(t)$, gdzie

$$\begin{cases} z'(t) &= \mathcal{I}(t, 0)z(t) \\ z(0) &= \vec{n}. \end{cases}$$

Z drugiej strony

$$z_h(t) = \frac{\varphi(t, x_0 + h\vec{n}) - \varphi(t, x_0)}{h} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(t, x_0).$$

Stąd dla dowolnego \vec{n} oraz x_0 pochodna kierunkowa $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(t, x_0)$ istnieje a ponadto jeśli

$$z(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(t, x),$$

to

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t, x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x))z(t, x) \\ z(0, x) &= \vec{n}. \end{cases}$$

Ponieważ funkcja f jest klasy C^1 a φ jest ciągła, więc $A(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x))$ jest również ciągła. Zatem na mocy twierdzenia o ciągłej zależności od parametru dla równań liniowych funkcja z a co za tym idzie również $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}$ jest ciągła.

■

Twierdzenie 5.0.17. (O C^r zależności od warunków początkowych) Niech $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie funkcją klasy C^r . Wówczas $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest również klasy C^r .

Dowód. Dowód indukcyjny:

1^o $n = 1$ - poprzednie twierdzenie

2^o Załóżmy że dla pewnego $r \in \mathbb{N}$ teza twierdzenia jest prawdziwa i załóżmy że f jest funkcją klasy C^{r+1} . Ponieważ $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = f(t, \varphi(t, x))$ oraz f, φ są funkcjami klasy C^r (założenie indukcyjne), więc pochodna cząstkowa $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ jest klasy C^r . Wystarczy zatem pokazać, że $z(t, x) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \varphi(t, x)$ jest klasy C^r dla dowolnego \vec{n} , $\|\vec{n}\| = 1$. Na mocy poprzedniego twierdzenia

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t, x) &= \mathcal{I}(t, x) z(t, x) \\ z(t_0, x) &= \vec{n}, \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{I}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x))$ jest klasy C^r . Rozważmy funkcję $F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ daną wzorem:

$$F(t, x, z) = \left(0, \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x)) \cdot z \right).$$

F jest oczywiście klasy C^r . Oznaczmy przez $\psi(t, \bar{x}) = (\psi_1(t, \bar{x}), \psi_2(t, \bar{x})) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ rozwiązanie równania postaci:

$$\begin{cases} (x'(t), z'(t)) &= F(t, x(t), z(t)) \\ x(t_0) &= \bar{x} \\ z(t_0) &= \vec{n}. \end{cases}$$

Na mocy założenia indukcyjnego ψ jest klasy C^r i dodatkowo dla dowolnego $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$\psi_1(t, \bar{x}) = \bar{x} \text{ dla } t \in [t_0, T].$$

Stąd

$$\frac{d}{dt} \psi_2(t, \bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, \bar{x})) \psi_2(t, \bar{x}).$$

Stąd $z(t, x) = \psi_2(t, x)$ jest klasy C^r .

■

6 Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

6.1 Podstawowe definicje i własności

Definicja 6.1.1. Równania różniczkowe cząstkowe, są to równania postaci

$$F(D^r u, D^{r-1} u, \dots, Du, u, x) = 0$$

przy czym szukaną funkcją jest $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^d$ otwarty). Liczbę r nazywamy rzędem równania.

Najpierw zajmiemy się równaniami liniowymi pierwszego rzędu, postaci

$$\sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x),$$

gdzie szukaną jest funkcja $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , zaś danymi są funkcje ciągłe $a_i, b : G \rightarrow \mathbb{R}$.

Przykład 6.1.1. Rozważmy równanie

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y.$$

Wówczas każda funkcja postaci $u(x, y) = g(x^2 + y^2) + x$ jest rozwiązaniem tego równania, ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= g'(x^2 + y^2)2x + 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= g'(x^2 + y^2)2y. \end{aligned}$$

Czyli rodzina rozwiązań równania nie zależy od skończonej liczby parametrów (tak jak w przypadku równań zwyczajnych), lecz jest parametryzowana funkcjami różniczkowalnymi. Stąd wynika, że warunki początkowe składające się ze skończonej listy warunków nie dadzą jednoznaczności rozwiązania.

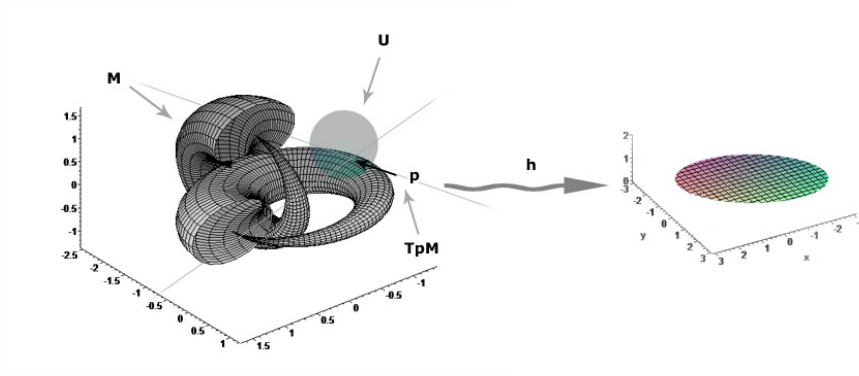
6.2 Rozmaitości (przypomnienie)

Definicja 6.2.1. Rozmaitość

Niech M będzie niepustym podzbiorem \mathbb{R}^d . Mówimy, że M jest w punkcie $p \in M$ rozmaitością wymiaru $k \leq d$ klasy C^r ($r \geq 1$), gdy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^d$ punktu p , otoczenie $V \subset \mathbb{R}^d$ punktu 0 oraz dyfeomorfizm $h : U \rightarrow V$ klasy C^r taki, że $h(p) = 0$ oraz

$$M \cap U = h^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})). \quad (6.2.1)$$

Wówczas zbiór $T_p M = (Dh(p))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ nazywamy przestrzenią styczną do M w punkcie p .



Twierdzenie 6.2.1. Niech dany będzie zbiór $M \subset \mathbb{R}^d$ oraz $p \in M$. Dla ustalonych $0 \leq k \leq d$ oraz $1 \leq r$ następujące warunki są równoważne:

1. M jest w punkcie p rozmaitością wymiaru k klasy C^r
2. Istnieje otoczenie U punktu p oraz $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$ klasy C^r taka, że pochodna $DF(p)$ ma rząd $d - k$ oraz

$$M \cap U = \{x \in U : F(x) = 0\}. \quad (6.2.2)$$

Wtedy $T_p M = \ker DF(p)$.

3. Istnieje otoczenie U punktu p , zbiór $S \subset \mathbb{R}^k$, $s_0 \in S$ oraz $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ klasy C^r takie, że $\alpha(s_0) = p$, $D\alpha(s_0)$ ma rząd k , $\alpha : S \rightarrow \alpha(S)$ jest homeomorfizmem i

$$M \cap U = \alpha(S) = \{\alpha(s) : s \in S\}. \quad (6.2.3)$$

Wtedy $T_p M = \text{Im } D\alpha(s_0)$.

Twierdzenie 6.2.2. (o funkcjach uwikłanych) Niech $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym oraz $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1 . Niech $(x_0, y_0) \in U$ będzie takie, że

$$H(x_0, y_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \det \frac{\partial}{\partial y} H(x_0, y_0) \neq 0.$$

Wówczas istnieje otoczenie V punktu x_0 oraz otoczenie W punktu y_0 oraz funkcja $h : V \rightarrow W$ klasy C^1 taka, że dla dowolnych $(x, y) \in V \times W$ mamy

$$H(x, y) = 0 \iff h(x) = y.$$

6.3 Rozwiązywanie równań liniowych

Niech $G \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem otwartym oraz $a_i : G \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$ funkcjami ciągłymi. Rozważmy równanie liniowe jednorodne postaci

$$\sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0 \quad \text{dla } x \in G. \quad (\text{RJ})$$

Dla tego równania rozważać będziemy równanie charakterystyczne postaci

$$x' = a(x) \quad (\text{RCH}),$$

czyli

$$\begin{cases} x'_1 &= a_1(x) \\ x'_2 &= a_2(x) \\ &\vdots \\ x'_d &= a_d(x) \end{cases}$$

Rozwiązania równania charakterystycznego będziemy nazywali charakterystykami równania (RJ).

Twierdzenie 6.3.1. Niech $G_1 \subset G \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem otwartym, zaś $u : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją różniczkowalną. Następujące warunki są równoważne:

1. funkcja $u : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem (RJ),
2. dla dowolnej charakterystyki $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($I \subset \mathbb{R}$ przedział) funkcja $u \circ x$ jest stała.

Dowód. (1 \Rightarrow 2) Niech u będzie rozwiązaniem (RJ) , a $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ pewną charakterystyką. Wówczas dla każdego $t \in I$ mamy

$$\frac{d}{dt}(u \circ x)(t) = Du(x(t)) \frac{dx}{dt}(t) = Du(x(t))a(x(t)) = \sum_{i=1}^d a_i(x(t)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t)) = 0.$$

(2 \Rightarrow 1) Niech $x_0 \in G_1$. Na mocy Twierdzenia Peano (2.2.2) istnieje charakterystyka $x : I \rightarrow G_1$ taka, że $x(0) = x_0$. Wówczas

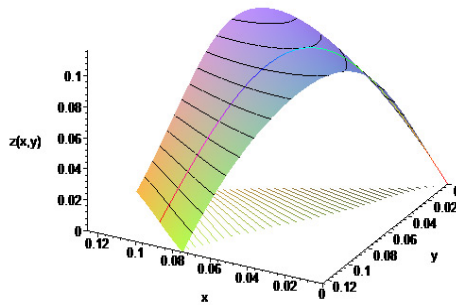
$$\sum_{i=1}^d a_i(x_0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = Du(x(0))a(x(0)) = Du(x(0))x'(0) = \left. \frac{d}{dt}(u \circ x)(t) \right|_{t=0} = 0.$$

■

Twierdzenie 6.3.2. Niech $a : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie funkcją klasy C^1 oraz niech $S \subset G$ będzie rozmaitością klasy C^1 takim, że $\dim S = d - 1$. Niech $p \in S$ będzie punktem takim, że $a(p) \notin T_p S$ (nie należy do przestrzeni stycznej). Wtedy istnieje otoczenie $G_1 \subset \mathbb{R}^d$ punktu p takie, że problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0 & \text{dla } x \in G_1 \\ u(x) = w(x) & \text{dla } x \in S \cap G_1 \end{cases} \quad (6.3.1)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na G_1 dla dowolnej funkcji $w : S \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 .



Przykład 6.3.1. Rozważmy problem postaci

$$\begin{cases} yu_x - xu_y = 0 \\ u(0, y) = y^3. \end{cases}$$

W tym przypadku $S = \{(x, y); x = 0\}$, $w(0, y) = y^3$. Równanie charakterystyczne jest postaci

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$$

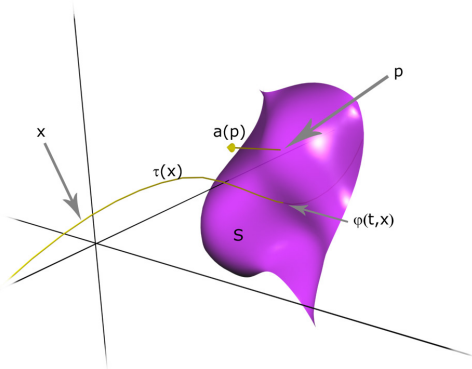
a charakterystyki postaci

$$\varphi(t, x, y) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Wszystkie charakterystyki są okręgami bo macierz fundamentalna jest macierzą obrotu, zatem rozwiązanie jest stałe na okręgach o środku w $(0, 0)$. Ale wynika z tego, że w otoczeniu $(0, 0)$ problem nie ma rozwiązania ponieważ z jednej strony $u(0, y) = u(0, -y)$ (gdyż $(0, y)$ i $(0, -y)$ leżą na jednej charakterystyce), a z drugiej $u(0, y) = y^3 \neq -y^3 = u(0, -y)$. Powodem dla którego ten problem nie ma rozwiązania jest fakt, że $a(0) = 0 \in T_0S$.

Lemat 6.3.3. *Załóżmy że spełnione są założenia Twierdzenia 6.3.2. Przez $t \mapsto \varphi(t, x)$ oznaczmy rozwiązaniem równania charakterystycznego takie, że $\varphi(0, x) = x$. Wtedy istnieje otoczenie G_1 punktu p , $\varepsilon > 0$ oraz funkcja $\tau : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że dla dowolnych $x \in G_1$ oraz $t < \varepsilon$*

$$\varphi(t, x) \in S \Leftrightarrow t = \tau(x).$$



$\tau(x)$ należy interpretować jako czas pierwszego przecięcia z rozmainością S charakterystyki wychodzącej z x .

Dowód. Ponieważ S jest $d - 1$ wymiarową rozmaitością punkcie p , więc istnieje otoczenie G_0 punktu p oraz funkcja $F : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że

$$S \cap G_0 = \{x \in G_0 : F(x) = 0\}$$

oraz $DF(p) \neq 0$. Rozważmy funkcję

$$H(x, t) = F(\varphi(t, x)).$$

Funkcja ta jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu $(p, 0)$, $H(p, 0) = 0$ oraz

$$\frac{dH}{dt}(p, 0) = DF(\varphi(0, p)) \frac{d\varphi}{dt}(0, p) = DF(p)a(\varphi(0, p)) = DF(p)a(p) \neq 0$$

ponieważ $a(p) \notin T_p S = \ker DF(p)$. Na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej istnieje otoczenie G_1 punktu p , $\varepsilon > 0$ oraz funkcja $\tau : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że dla $x \in G_1$ oraz $|t| < \varepsilon$ mamy

$$H(x, t) = 0 \Leftrightarrow t = \tau(x).$$

Stąd dla $x \in G_1$ oraz $|t| < \varepsilon$ mamy

$$\varphi(t, x) \in S \Leftrightarrow F(\varphi(t, x)) = 0 \Leftrightarrow H(x, t) = 0 \Leftrightarrow t = \tau(x)$$

■

Lemat 6.3.4. *Jeśli $t \mapsto \varphi(t, x)$ jest rozwiązaniem równania autonomicznego $x' = a(x)$ takim, że $\varphi(0, x) = x$, to*

$$\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)).$$

Dowód. Rozważmy funkcję $u(t) = \varphi(t + s, x)$. Wówczas

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t + s, x) = a(\varphi(t + s, x)) = a(u(t))$$

oraz $u(0) = \varphi(s, x)$. Ponieważ a jest klasy C^1 , więc $u(t) = \varphi(t, \varphi(s, x))$.

■

Ponadto jeśli τ jest funkcją z Lematu 6.3.3, to dla dowolnego $y \in G_1$ mamy

$$s = \tau(\varphi(t, y)) \Leftrightarrow \varphi(s, \varphi(t, y)) \in S \Leftrightarrow \varphi(s + t, y) \in S \Leftrightarrow \tau(y) = s + t,$$

stąd

$$\tau(\varphi(t, y)) = \tau(y) - t.$$

Dowód. Twierdzenia 6.3.2.

Niech G_1 oraz $\tau : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ będą takie jak w Lemacie 6.3.3. Dla $x \in G_1$ definiujemy funkcję $u : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$u(x) = w(\varphi(\tau(x), x)).$$

u jest klasy C^1 i jest ona stała na charakterystykach ponieważ:

$$\begin{aligned} u(\varphi(t, y)) &= w(\varphi(\tau(\varphi(t, y)), \varphi(t, y))) = w(\varphi(\tau(y) - t, \varphi(t, y))) = \\ &= w(\varphi(\tau(y), \varphi(0, y))) = w(\varphi(\tau(y), y)) = w(y). \end{aligned}$$

Na mocy Twierdzenia 6.3.1 funkcja u jest rozwiązaniem (RJ) . Ponadto, jeśli $x \in S \cap G_1$, to

$$u(x) = w(\varphi(\tau(x), x)) = w(\varphi(0, x)) = w(x).$$

Założmy, że $u_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem (RJ) takim, że $u_1(x) = w(x)$ dla $x \in G_1 \cap S$. Ponieważ u_1 jest stała na charakterystykach, więc dla $x \in G_1$ mamy

$$u_1(x) = u_1(\varphi(\tau(x), x)) = w(\varphi(\tau(x), x)) = u(x).$$

■

Zajmiemy się teraz równaniem liniowym niejednorodnym postaci

$$\sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x). \quad (RNJ)$$

Twierdzenie 6.3.5. Niech $t \mapsto \varphi(t, x)$ będzie rozwiązaniem równania charakterystycznego (RCH) dla równania jednorodnego (RJ) takim, że $\varphi(0, x) = x$. Niech $G_1 \subset G$ będzie podzbiorem otwartym oraz $u : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją różniczkowalną. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. u jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (RNJ) ,
2. dla dowolnego $x \in G_1$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla $|t| < \varepsilon$ mamy

$$u(\varphi(t, x)) = u(x) + \int_0^t b(\varphi(\tau, x)) d\tau.$$

Dowód. (1 \Rightarrow 2) Jeśli u jest rozwiązaniem (RNJ), to

$$\frac{d}{dt}u(\varphi(t, x)) = Du(\varphi(t, x))\frac{d}{dt}\varphi(t, x) = Du(\varphi(t, x))a(\varphi(t, x)) = b(\varphi(t, x)),$$

stąd

$$u(\varphi(t, x)) - u(x) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}u(\varphi(\tau, x))d\tau = \int_0^t b(\varphi(\tau, x))d\tau.$$

(2 \Rightarrow 1) Ponieważ

$$u(\varphi(t, x)) - u(x) = \int_0^t b(\varphi(\tau, x))d\tau,$$

więc

$$\frac{d}{dt}u(\varphi(t, x)) = b(\varphi(t, x)).$$

Stąd

$$b(\varphi(t, x)) = \frac{d}{dt}u(\varphi(t, x)) = Du(\varphi(t, x))\frac{d}{dt}\varphi(t, x) = Du(\varphi(t, x))a(\varphi(t, x)).$$

Zatem kładąc $t = 0$ otrzymujemy

$$Du(x)a(x) = b(x)$$

dla dowolnego $x \in G_1$.

■

Twierdzenie 6.3.6. Niech funkcje dane $a_i, b : G \rightarrow \mathbb{R}$ w (RNJ) będą klasy C^1 . Niech $S \subset G$ będzie rozmaitością klasy C^1 taką, że $\dim S = d - 1$. Niech $p \in S$ będzie punktem taki, że $a(p) \notin T_p S$. Wtedy istnieje otoczenie otwarte $G_1 \subset \mathbb{R}^d$ punktu p takie, że problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x) & \text{dla } x \in G_1 \\ u(x) = w(x) & \text{dla } x \in S \cap G_1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej funkcji $w : S \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 .

Dowód. Niech G_1 oraz $\tau : G \rightarrow \mathbb{R}$ będą jak w Lemacie 6.3.3. Dla $x \in G_1$ określamy funkcję u następująco

$$u(x) = w(\varphi(\tau(x), x)) - \int_0^{\tau(x)} b(\varphi(s, x)) ds.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} u(\varphi(t, x)) &= w(\varphi(\tau(\varphi(t, x)), \varphi(t, x))) - \int_0^{\tau(\varphi(t, x))} b(\varphi(s, \varphi(t, x))) ds \\ &= w(\varphi(\tau(x) - t, \varphi(t, x))) - \int_0^{\tau(x)-t} b(\varphi(s, \varphi(t, x))) ds \\ &= w(\varphi(\tau(x), x)) - \int_0^{\tau(x)} b(\varphi(s + t, x)) ds + \int_0^t b(\varphi(s, x)) ds \\ &= u(x) + \int_0^t b(\varphi(s, x)) ds. \end{aligned}$$

Założmy, że $u_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem (RNJ) takim, że $u_1(x) = w(x)$ dla $x \in G_1 \cap S$. Na mocy Twierdzenia 6.3.5 dla dowolnego $x \in G_1$ mamy

$$u_1(\varphi(\tau(x), x)) = u_1(x) + \int_0^{\tau(x)} b(\varphi(s, x)) ds,$$

stąd

$$u_1(x) = w(\varphi(\tau(x), x)) - \int_0^{\tau(x)} b(\varphi(s, x)) ds = u(x). \quad \blacksquare$$

Uwaga 6.3.1. Metoda charakterystyk jest bardzo wygodna przy numerycznym wyznaczaniu rozwiązań przybliżonych problemu Cauchy'ego

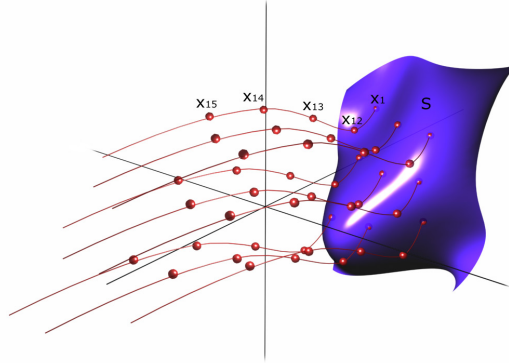
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^d a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & \text{dla } x \in G_1 \\ u(x) = w(x) & \text{dla } x \in S \cap G_1. \end{cases}$$

W celu rozwiązania problemu ustalamy d punktów x_1, x_2, \dots, x_d na rozmaitości S . Następnie dla każdego x_i wyznaczamy jednocześnie numeryczne rozwiązanie równania charakterystycznego

$$\begin{cases} x' &= a(x) \\ x(0) &= x_i. \end{cases}$$

otrzymując kolejno punkty (jh, x_{ij}) (h - długość kroku). Na koniec przybliżone wartości u w x_{ij} definiujemy następująco

$$u(x_{i,j}) = w(x_i).$$



6.4 Równania quasi-liniowe

W następnej części skryptu udowodnimy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla ogólniejszej klasy równań pierwszego rzędu, tzw. równań quasi-liniowych postaci:

$$\sum_{i=1}^d a_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x, u(x)) \quad (RQL) \quad (6.4.1)$$

gdzie $a_i, b : G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$ ($G \subset \mathbb{R}^d$ otwarty) są funkcjami klasy C^1 . W tym przypadku równanie charakterystyczne będzie miało postać

$$\begin{cases} x' &= a(x, u) \\ u' &= b(x, u), \end{cases} \quad (6.4.2)$$

czyli

$$\begin{cases} x'_1 &= a_1(x, u) \\ x'_2 &= a_2(x, u) \\ &\vdots \\ x'_d &= a_d(x, u) \\ u' &= b(x, u). \end{cases}$$

Oznaczmy przez $t \mapsto \psi(t, x_0, u_0)$ rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' &= a(x, u) \\ u' &= b(x, u) \\ x(0) &= x_0 \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

Takie rozwiązania będziemy nazywać charakterystykami (*RQL*).

Definicja 6.4.1. Mówimy, że zbiór $A \subset G \times \mathbb{R}$ jest niezmienniczy dla ψ , gdy dla dowolnych t, x, u takich, że $\psi(t, x, u) \in G \times \mathbb{R}$ mamy

$$(x, u) \in A \Rightarrow \psi(t, x, u) \in A.$$

Twierdzenie 6.4.1. Niech $G_1 \subset \mathbb{R}^d$ będzie podzbiorem otwartym, $u : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją klasy C^2 . Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. u jest rozwiązaniem (*RQL*),
2. wykres $\text{Graph}(u) = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, x \in G_1\}$ jest zbiorem niezmienniczym dla ψ .

Dowód. (1 \Rightarrow 2) Niech $u : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem (*RQL*). Weźmy dowolny punkt wykresu $p = (x, u(x))$ oraz rozważmy funkcję

$$k(t) = \psi_2(t, p) - u(\psi_1(t, p)),$$

która jest określona na pewnym przedziale zawierającym 0. Wówczas

$$k(0) = \psi_2(0, x, u(x)) - u(\psi_1(0, x, u(x))) = u(x) - u(x) = 0$$

Różniczkując tę funkcję otrzymujemy

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{d}{dt} \psi_2(t, p) - Du(\psi_1(t, p)) \frac{d}{dt} \psi_1(t, p) \\ &= b(\psi_1(t, p), \psi_2(t, p)) - Du(\psi_1(t, p))a(\psi_1(t, p), \psi_2(t, p)) \\ &= b(\psi_1(t, p), k(t) + u(\psi_1(t, p))) - Du(\psi_1(t, p))a(\psi_1(t, p), k(t) + u(\psi_1(t, p))) \end{aligned}$$

Oznacza to, że funkcja k spełnia następujące równanie różniczkowe zwyczajne

$$\begin{cases} k'(t) &= b(\psi_1(t, p), k(t) + u(\psi_1(t, p))) - Du(\psi_1(t, p))a(\psi_1(t, p), k(t) + u(\psi_1(t, p))) \\ k(0) &= 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja $k_1 \equiv 0$ jest rozwiązaniem powyższego równania ponieważ

$$0 = b(\psi_1(t, p), u(\psi_1(t, p))) - Du(\psi_1(t, p))a(\psi_1(t, p), u(\psi_1(t, p))).$$

6 RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE PIERWSZEGO RZĘDU 86

Ponadto prawa strona równania jest klasy C^1 , więc z jednoznaczności rozwiązań wynika, że $k \equiv 0$. Zatem

$$\psi(t, x, u(x)) = (\psi_1(t, p), \psi_2(t, p)) = (\psi_1(t, p), u(\psi_1(t, p))),$$

czyli leży na wykresie funkcji u .

(2 \Rightarrow 1) Załóżmy że $Graph(u)$ jest niezmienniczy dla ψ . Ustalmy $x \in G_1$, Wówczas dla t bliskiego zera mamy

$$\psi(t, x, u(x)) \in Graph(u),$$

czyli

$$\psi_2(t, x, u(x)) = u(\psi_1(t, x, u(x))).$$

Stąd

$$b(x, u(x)) = \left. \frac{d}{dt} \psi_2(t, x, u(x)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} u(\psi_1(t, x, u(x))) \right|_{t=0} = Du(x)a(x, u(x)).$$

■

Twierdzenie 6.4.2. Niech funkcje dane $a_i, b : G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ równania (RQL) będą klasy C^1 . Niech $S \subset G$ będzie rozmaitością wymiaru $d-1$ oraz $w : S \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją klasy C^1 . Niech $p \in S$ będzie punktem takim, że

$$a(p, w(p)) \notin T_p S.$$

Wówczas istnieje otoczenie $G_1 \subset \mathbb{R}^d$ punktu p takie, że problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^d a_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x, u(x)) & \text{dla } x \in G_1 \\ u(x) = w(x) & \text{dla } x \in S \cap G_1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. Ponieważ S jest rozmaitością wymiaru $d-1$ w punkcie p , więc istnieje funkcja $\alpha : \mathbb{R}^{d-1} \supset H_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ (homeomorfizm) klasy C_1 oraz $G_0 \subset \mathbb{R}^d$ otoczenie p takie, że

$$S \cap G_0 = \alpha(H_0)$$

oraz dla $\xi_0 \in H_0$, $\alpha(\xi_0) = p$. $D\alpha(\xi_0) : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest monomorfizmem.

Zdefiniujmy funkcję $\beta : H_0 \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

$$\beta(\xi) = (\alpha(\xi), w(\alpha(\xi)))$$

6 RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE PIERWSZEGO RZĘDU 87

Niech $\phi(t, x, u)$ będzie rozwiązaniem (RCH) taka, że $\psi(0, x, u) = (x, u)$ oraz niech $I_{(x,t)}$ będzie maksymalnym odcinkiem na którym to rozwiązania istnieje. Oznaczmy

$$P = P_{G_0} = \{\psi(t, \beta(\xi)) \in G_0 \times \mathbb{R}, \xi \in H_0, t \in I_{\beta\xi}\}$$

W dalszej części dowodu pokażemy (ewentualnie zmniejszając G_0), że P_{G_0} jest wykresem pewnej funkcji $u : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 . Zauważmy że zbiór P_{G_0} jest niezmienniczy dla ψ względem $G_0 \times \mathbb{R}$ ponieważ

$$\psi(s, \psi(t, \beta(\xi))) = \psi(s + t, \beta(\xi)) \in P_{G_0}$$

zatem ma mocy twierdzenia funkcja u będzie rozwiązaniem (RQL). Ponadto

$$P_{G_0} \ni \psi(0, \beta(\xi)) = \beta(\xi) = (\alpha(\xi), w(\alpha(\xi)))$$

więc

$$w(\alpha(\xi)) = u(\alpha(\xi)) \text{ dla } \xi \in H_0$$

stąd

$$a(x) = w(x) \text{ dla } x \in S \cap G_0$$

Rozważmy funkcję $g(t, \xi) = \psi(t, \beta(\xi)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ dla $\xi \in H_0$. Funkcja ta ma dwie współrzędne

$$\begin{aligned} g_1(t, \xi) &= \psi_1(t, \beta(\xi)) \in \mathbb{R}^d \\ g_2(t, \xi) &= \psi_2(t, \beta(\xi)) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

skorzystamy teraz z małego pomocniczego lematu.

Lemat 6.4.3. g_1 jest dyfeomorfizmem na otoczeniu $(-\delta, \delta) \times H_1$ punktu $(0, \xi_0)$.

Odlóżmy dowód lematu na później i dokończmy dowód twierdzenia.

Weźmy $G_1 = g_1((-\delta, \delta) \times H_1)$ oraz $u : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ jako $u = g_2 \circ g_1^{-1}$. Wówczas

$$\psi(t, \beta(\xi)) = (g_1(t, \beta(\xi)), u(g_1(t, \beta(\xi)))) = (g_1(t, \xi), g_2 \circ g_1^{-1} \circ g_1(t, \xi)) = (g_1(t, \xi), g_2(t, \xi))$$

stąd $P_{G_1} = \text{Graph}(u)$ zatem u jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego.

■

Dowód. (lematu) Ze względu na twierdzenie o lokalnym odwracaniu odwzorowań wystarczy pokazać, że $Dg_1(0, \xi_0) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest monomorfizmem. Zauważmy że

$$Dg_1(t, \xi) = (D_t g_1(t, \xi), D_\xi g_1(t, \xi))$$

ponadto

$$\begin{aligned} D_t g_1(t, \xi) &= \frac{d}{dt} \psi_1(t, \beta(\xi)) = a(\psi(t, \beta(\xi))) \\ D_\xi g_1(t, \xi) &= \frac{d}{d\xi} \psi_1(t, \beta(\xi)) = D_{(x,u)} \psi_1(t, \beta(\xi)) D\beta(\xi) \end{aligned}$$

z drugiej strony

$$\begin{aligned} \psi_1(0, x, u) &= x \\ D_{(x,u)} \psi_1(0, x, u) &= (id_{\mathbb{R}^d}, 0) \end{aligned}$$

oraz

$$D\beta(\xi) = (D\alpha(\xi), D(w \circ \alpha)(\xi))$$

zatem

$$\begin{aligned} D_t g_1(0, \xi_0) &= a(\psi_1(0, \beta(\xi_0))) = a(p, w(p)) \\ D_\xi g_1(0, \xi_0) &= (id, 0)(D\alpha(\xi_0), D(w \circ \alpha)(\xi_0)) = D\alpha(\xi_0) \end{aligned}$$

Weźmy dowolne $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, wtedy

$$Dg_1(0, \xi_0)(t, \xi) = a(p, w(p))t + D\alpha(\xi_0)\xi$$

Teraz możemy udowodnić, że $Dg_1(0, \xi_0)$ jest monomorfizmem. Załóżmy że

$$0 = Dg_1(0, \xi_0)(t, \xi) = a(p, w(p))t + D\alpha(\xi_0)\xi$$

stąd

$$a(p, w(p))t = -D\alpha(\xi_0)\xi \in \text{Im} D\alpha(\xi_0) = T_p S$$

Z faktu, że $a(p, w(p))t \in T_p S$ wynika że $t = 0$, więc $D\alpha(\xi_0)(\xi) = 0$. Jednak $D\alpha(\xi_0)$ jest monomorfizmem, czyli $\xi = 0$

■

Pozostaje jeszcze w udowodnić jednoznaczność (w twierdzeniu).
 Niech $u_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem problemu Cauchy'ego. Wówczas $Graph(u_1)$ jest niezmienniczy dla ψ ponieważ

$$(\alpha(\xi), w(\alpha(\xi))) = (\alpha(\xi), u_1(\alpha(\xi))) \in Graph(u_1)$$

zatem dla małych t

$$\begin{aligned} & \psi(t, \alpha(\xi), w(\alpha(\xi))) \in Graph(u_1) \\ & \parallel \\ & \psi_1(t, \beta(\xi)), \psi_2(t, \beta(\xi)) \\ & \parallel \\ & g_1(t, \xi), g_2(t, \xi) \\ & \parallel \\ & g_1(t, \xi), u_1(g_1(t, \xi)) \end{aligned}$$

$$u_1 \circ g_1 = g_2, \text{ czyli } u_1 = g_2 \circ g_1^{-1} = u$$



7 Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu

W tej części wykładu zajmiemy się równaniami liniowymi postaci

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad (RL) \quad (7.0.3)$$

gdzie danymi są funkcje $a_{i,j}$, b_i , c oraz f określone na pewnym otwartym zbiorze $G \subset \mathbb{R}^d$, zaś szukaną jest funkcja $u : G \rightarrow \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a_{ij} = a_{ji}$. Niech $A \in M_d(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną oraz niech

$$\alpha(x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}x_i x_j \quad (7.0.4)$$

będzie jej formą kwadratową. Wówczas istnieje izomorfizm liniowy $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ taki, że

$$(\alpha \circ h)(\xi) = \varepsilon_1 \xi^2 + \dots + \varepsilon_d \xi_d^2 \quad (7.0.5)$$

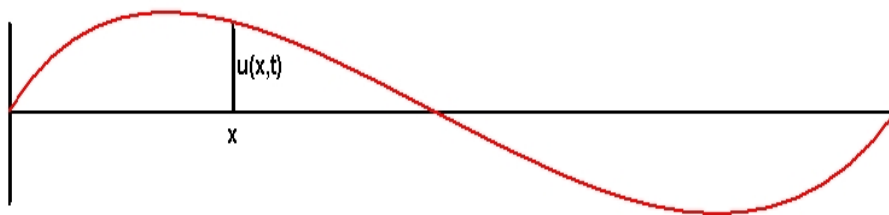
gdzie $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. Liczba dodatnich, ujemnych oraz zerowych ε_i nie zależy od wyboru h .

Definicja 7.0.2. Ustalmy $p \in G$ oraz niech $A = \{a_{ij}(p)\}_{i,j=1,\dots,d}$. Mówimy, że (RL) jest w punkcie p

1. eliptyczne, gdy wszystkie ε_i są niezerowe i tego samego znaku,
2. hiperboliczne, gdy wszystkie ε_i są niezerowe i dokładnie $d - 1$ z nich ma taki sam znak
3. paraboliczne, gdy dokładnie jeden spośród ε_i jest równy zero, a pozostałe mają ten sam znak.

Równanie (RL) jest w zbiorze G hiperboliczne, eliptyczne, paraboliczne, gdy we wszystkich punktach jest odpowiednio hiperboliczne, eliptyczne, paraboliczne.

Przykład 7.0.1. (Równanie struny) Rozważmy położenie struny, które zmienia się w czasie. Oznaczmy przez $u(x, t)$ wielkość wychylenia się struny w chwili t , w odległości x od punktu zaczepienia struny.



Wówczas położenie struny opisywane jest w przybliżeniu przez równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7.0.6)$$

gdzie $c > 0$ jest stałą zależną od rozciągliwości struny. Jest to równanie hiperboliczne.

Przykład 7.0.2. (Równanie przewodnictwa cieplnego) Załóżmy, że $G \subset \mathbb{R}^d$ jest jednorodnym obszarem do którego dostarczane jest ciepło $f(t, x)$ w chwili t , w punkcie x . Oznaczmy przez $u(t, x)$ temperaturę w chwili t w punkcie x . Wówczas proces rozchodzenia się ciepła jest opisany równaniem

$$a^2 \Delta u = u_t + f, \quad (7.0.7)$$

gdzie $\Delta u = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}$ nazywamy laplasjanem funkcji u , zaś a jest stałą zależną od prędkości rozchodzenia się ciepła. Jest to równanie paraboliczne.

Przykład 7.0.3. (Równanie równowagi cieplnej) Załóżmy, że w Przykładzie 2 f nie zależy od czasu, a proces cieplny doszedł do stanu równowagi, czyli temperatura nie zależy od czasu. Wówczas rozkład temperatur opisuje równanie:

$$\Delta u = f(x). \quad (7.0.8)$$

Jest to równanie eliptyczne.

7.1 Równanie struny

Rozważmy następujący problem:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t & (i) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{dla } 0 \leq t & (ii) \\ u(x, 0) = f(x) & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi & (iii) \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi & (iv). \end{cases} \quad (7.1.1)$$

7 RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE DRUGIEGO RZĘDU 92

Powyższe problem opisuje zachowanie się struny o długości π umocowanej na końcach - warunek (ii), która w chwili początkowej jest w położeniu opisanym przez funkcję f - warunek (iii) oraz w chwili początkowej każdy element struny x ma prędkość $g(x)$ - warunek (iv). Zgodnie z powyższą interpretacją (ii) nazwiemy warunkiem brzegowym, zaś (iii) oraz (iv) warunkami początkowymi.

W najbliższym czasie pokażemy, że problem 7.1.1 posiada dokładnie jedno rozwiązanie, przy znanej gładkości f i g . W tym celu zastosujemy metodę rozdzielania zmiennych, która polega na szukaniu pewnych rozwiązań równania (i) z warunkiem (ii), a na podstawie tych rozwiązań na szukanie rozwiązań 7.1.1. Załóżmy, że

$$u(x, t) = v(x)w(t), \quad (v(x), w(t) \neq 0) \quad (7.1.2)$$

spełnia (i) oraz (ii). Wówczas

$$v''(x)w(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v(x)w''(t). \quad (7.1.3)$$

Czyli

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t. \quad (7.1.4)$$

Stąd istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\begin{aligned} v''(x) &= \lambda v(x) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \pi \\ w''(t) &= \lambda w(t) \quad \text{dla } 0 \leq t \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

oraz $v(0) = v(\pi) = 0$ na podstawie (ii).

1° Gdy $\lambda > 0$, to

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) = c_1 + c_2 \\ 0 &= v(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{aligned}$$

czyli $c_1 = c_2 = 0$ oraz $u \equiv 0$.

2° Gdy $\lambda = 0$, to

$$v(x) = c_1 + c_2 x.$$

7 RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE DRUGIEGO RZĘDU 93

Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) = c_1 \\ 0 &= v(\pi) = c_1 + c_2\pi, \end{aligned}$$

czyli $c_1 = c_2 = 0$ oraz $u \equiv 0$.

3° Gdy $\lambda < 0$, to

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x). \quad (7.1.6)$$

Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) = c_1 \\ 0 &= v(\pi) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi), \end{aligned}$$

stąd $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$ czyli $\lambda = -k^2, k = 1, 2, \dots$. Wtedy $v(x) = c \sin(kx)$. Wówczas $w''(t) + k^2w(t) = 0$, czyli

$$w(t) = d_1 \cos(kt) + d_2 \sin(kt).$$

Zatem funkcje postaci

$$u(x, t) = (a \cos(kt) + b \sin(kt)) \sin(kx) \text{ dla } a, b \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots$$

są rozwiązaniem (i) z warunkiem (ii).

Rozwiązania problemu 7.1.1 będziemy szukać spośród funkcji postaci $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$, gdzie

$$u_k(x, t) = (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \sin(kx) \text{ dla } a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots \quad (7.1.7)$$

Ponieważ $u(x, 0) = f(x)$, więc

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx). \quad (7.1.8)$$

Wówczas dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ mamy

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(lx) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\pi} \sin(lx) \sin(kx) dx = \frac{\pi}{2} a_k, \quad (7.1.9)$$

ponieważ

$$\int_0^{\pi} \sin(lx) \sin(kx) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{kl},$$

stąd

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx$$

Ponieważ $u_t(x, 0) = g(x)$, więc

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin(kx),$$

zatem

$$b_k = \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi g(x) \sin(kx) dx.$$

Lemat 7.1.1. *Jeśli $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^4 taką, że $f(0) = f(\pi) = 0$ oraz $f''(0) = f''(\pi) = 0$, to istnieje $M > 0$ takie, że $|a_k| \leq \frac{M}{k^4}$, gdzie*

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx. \quad (7.1.10)$$

Ponadto $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$.

Dowód. Całkując 4 razy przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx &= \int_0^\pi f'(x) \frac{\cos(kx)}{k} dx = - \int_0^\pi f''(x) \frac{\sin(kx)}{k^2} dx \\ &= \frac{f''(\pi)(-1)^k - f''(0)}{k^3} + - \int_0^\pi f'''(x) \frac{\cos(kx)}{k^3} dx \\ &= \frac{1}{k^4} \int_0^\pi f^{(4)}(x) \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Zatem

$$|a_k| \leq \frac{1}{k^4} \sup_{x \in [0, \pi]} |f^{(4)}(x)|.$$

Rozważmy funkcję nieparzystą $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Jest ona klasy C^4 , zatem jest równa swojemu szeregowi Fouriera, czyli

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \sin(kx) \text{ dla } x \in [-\pi, \pi], \text{ gdzie}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x) \sin(kx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \widetilde{f}(x) \sin(kx) dx - \int_{-\pi}^0 f(-x) \sin(kx) dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = a_k.
\end{aligned}$$

Zatem

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \text{ dla } x \in [0, \pi].$$

■

Twierdzenie 7.1.2. Niech $f, g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^4 takimi, że:

$$\begin{aligned}
f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0 \\
f''(0) = f''(\pi) = g''(0) = g''(\pi) = 0
\end{aligned} \tag{7.1.11}$$

Wówczas szereg $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$, gdzie

$$u_k(x, t) = (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \sin(kx),$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} g(x) \sin(kx) dx$$

- jest jednostajnie zbieżny do funkcji klasy C^2 ,
- u jest jedynym rozwiązaniem problemu 7.1.1.

Dowód. 1° Istnienie. Ze względu na Lemat 7.1.1, istnieje $M > 0$ takie, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$|u_k(x, t)| \leq \frac{M}{k^4}, \quad \|Du_k(x, t)\| \leq \frac{M}{k^3}, \quad \|D^2u_k(x, t)\| \leq \frac{M}{k^2}.$$

Stąd szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} Du_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} D^2u_k$$

są jednostajnie zbieżne. Zatem $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2 oraz

$$Du = \sum_{k=1}^{\infty} Du_k, \quad D^2u = \sum_{k=1}^{\infty} D^2u_k.$$

7 RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE DRUGIEGO RZĘDU 96

Zatem

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_k)_{xx}(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) k^2 \sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_k)_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Ponadto, $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$ dla $t \geq 0$ oraz

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = f(x), \\ u_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin(kx) = g(x) \end{aligned}$$

dla $x \in [0, \pi]$, na mocy Lematu 7.1.1.

2^o Jednoznaczność. Załóżmy, że $u_1, u_2 : [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami spełniającymi 7.1.1. Wówczas $v = u_1 - u_2$ jest rozwiązaniem problemu:

$$\begin{cases} v_{xx}(x, t) = v_{tt}(x, t) & \text{dla } x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0 & \text{dla } t \geq 0 \\ v(x, 0) = 0 & \text{dla } x \in [0, \pi] \\ v_t(x, 0) = 0 & \text{dla } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Rozważmy funkcję $E : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ postaci

$$E(t) = \int_0^{\pi} (v_x^2(x, t) + v_t^2(x, t)) dx.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^{\pi} \left(\frac{d}{dt} v_x^2(x, t) + \frac{d}{dt} v_t^2(x, t) \right) dx \\ &= \int_0^{\pi} (2v_x(x, t) \cdot v_{xt}(x, t) + 2v_t(x, t) \cdot v_{tt}(x, t)) dx. \end{aligned}$$

Następnie całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2(v_x \cdot v_t)(x, t)|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (-2v_{xx} \cdot v_t + 2v_t \cdot v_{tt}) dx \\ &= 2(v_x(\pi, t)v_t(\pi, t) - v_x(0, t)v_t(0, t)) + 2 \int_0^{\pi} v_t(v_{tt} - v_{xx}) dx = 0, \end{aligned}$$

ponieważ $v_t(\pi, t) = v_t(0, t) = 0$. Ponieważ

$$E(0) = \int_0^\pi (v_x^2(x, 0) + v_t^2(x, 0)) dx = 0,$$

więc

$$E'(t) = \int_0^\pi \left(\frac{d}{dt} v_x^2(x, t) + \frac{d}{dt} v_t^2(x, t) \right) dx = 0 \text{ dla dowolnego } t \neq 0.$$

Stąd $v_x(x, t) = v_t(x, t) = 0$ dla $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, +\infty)$. Ponadto

$$v(x, t) = v(x, t) - v(x, 0) = \int_0^t v_t(x, s) ds = 0.$$

■

Twierdzenie 7.1.3. Niech $f, f_n, g, g_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^4 spełniającymi warunek 7.1.11. Niech u oraz u_n będą odpowiednio rozwiązaniami problemu 7.1.1 dla funkcji f, g oraz f_n, g_n . Jeśli $f_n \xrightarrow{c^2} f$, $g_n \xrightarrow{c^1} g$, to $u_n \rightarrow u$ jednostajnie ($f_n \xrightarrow{c^k} f$ oznacza, że f_n zbiega jednostajnie do f wraz z pochodnymi do rzędu k).

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy $f \equiv 0$ i $g \equiv 0$. Załóżmy, że $f_n \xrightarrow{c^2} 0$ oraz $g_n \xrightarrow{c^1} 0$. Pokażemy, że $u_n \rightarrow u$ jednostajnie. Na mocy Twierdzenia 7.1.2, $u \equiv 0$ oraz

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^n \cos(kt) + b_k^n \sin(kt)) \sin(kx),$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_k^n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(x) \sin(kx) dx = -\frac{2}{\pi k^2} \int_0^\pi f_n''(x) \sin(kx) dx \\ b_k^n &= \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi g_n(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi k^2} \int_0^\pi g_n'(x) \cos(kx) dx. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} |u_n(x, t) - u(x, t)| &= |u_n(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k^n| + |b_k^n|) \\ &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\int_0^\pi |f_n''(x)| dx + \int_0^\pi |g_n'(x)| dx \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \left(\sup_{x \in [0, \pi]} |f_n''(x)| + \sup_{x \in [0, \pi]} |g_n'(x)| \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

jednostajnie dla dowolnych $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty)$.



8 Problem Dirichleta

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem otwartym ograniczonym i spójnym. Oznaczmy przez $\partial\Omega$ brzeg Ω . Przypuśćmy, że dane są funkcje ciągłe:

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Oznaczmy przez Δu laplasjan funkcji u , czyli

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \Delta u_{x_i x_i}.$$

Problem Dirichleta polega na znalezieniu funkcji $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej i klasy C^2 na Ω takiej, że:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = F(x) & \text{dla } x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & \text{dla } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{PD})$$

Rozwiązanie tego równania możemy zinterpretować jako rozkład temperatur w ciele $\bar{\Omega}$, gdy F jest rozkładem dostarczanego w każdej chwili ciepła, pod warunkiem, że znamy temperaturę ciała na brzegu.

W dalszej części udowodnimy twierdzenia o jednoznaczności i ciągłej zależności od F i f rozwiązań (PD).

Lemat 8.0.4. *Niech $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Jeśli*

$$\Delta u(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \Omega,$$

to

$$u(x) < \max_{\bar{\Omega}} u \quad \text{dla } x \in \Omega.$$

Dowód. Przypuśćmy, że u przyjmuje wartość największą w $a \in \Omega$. Wówczas dla dowolnego $i = 1, \dots, d$ rozważmy funkcję

$$v_i(\xi) = u(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \dots, a_d).$$

Ponieważ v_i przyjmuje wartość największą w a_i , więc $u_{x_i x_i}(a) = v_i''(a_i) \leq 0$ dla dowolnego $i = 1, \dots, d$. Stąd

$$\Delta u(a) = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}(a) \leq 0.$$

■

Lemat 8.0.5. Niech $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Jeśli

$$\Delta u(x) \geq 0 \text{ dla } x \in \Omega,$$

to

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz rozważmy funkcję $v(x) = u(x) + \varepsilon\|x\|^2$. Wówczas $\Delta v(x) = \Delta u(x) + 2d\varepsilon > 0$. Na mocy Lematu 8.0.4 $\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$. Ponadto zbiór Ω jako ograniczony, czyli znajduje się w kuli domkniętej $K(0, r)$. Stąd

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon r^2.$$

Zbiegając z $\varepsilon \rightarrow 0$, otrzymujemy tezę lematu.

■

Twierdzenie 8.0.6. (Zasada maksimum) Niech $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Jeśli $\Delta u(x) = 0$ dla $x \in \Omega$, to

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Dowód. Stosując Lemat 8.0.5 dla funkcji u oraz $(-u)$ mamy

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} u &\leq \max_{\partial\Omega} u \\ \max_{\bar{\Omega}}(-u) &\leq \max_{\partial\Omega}(-u). \end{aligned}$$

Ponieważ $u \leq |u|$ oraz $-u \leq |u|$, więc

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} u &\leq \max_{\partial\Omega} |u| \\ \max_{\bar{\Omega}}(-u) &\leq \max_{\partial\Omega} |u|. \end{aligned}$$

Stąd

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max(\max_{\bar{\Omega}}(-u), \max_{\bar{\Omega}} u) \leq \max_{\partial\Omega} |u|$$

■

Twierdzenie 8.0.7. (o jednoznaczności rozwiązań dla problemu Dirichleta) Problem Dirichleta (PD) ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód. Niech u_1, u_2 będą rozwiązaniami (PD). Rozważmy funkcję $u = u_1 - u_2$. Wtedy

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \Delta u_1(x) - \Delta u_2(x) = F(x) - F(x) = 0 & \text{dla } x \in \Omega \\ u(x) = u_1(x) - u_2(x) = f(x) - f(x) = 0 & \text{dla } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Na mocy zasady maksimum dla dowolnego $x \in \Omega$ mamy

$$|u(x)| \leq \max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| = 0,$$

czyli $u_1 \equiv u_2$. ■

Twierdzenie 8.0.8. (Zasada maksimum II) Niech $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Załóżmy, że $\Delta u = 0$ dla $x \in \Omega$ oraz niech

$$M(u) = \sup_{\Omega} |\Delta u| < \infty.$$

Jeśli $\Omega \subset K(0, r)$, to dla dowolnego $x \in \bar{\Omega}$ mamy

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + \frac{r^2 M(u)}{2d}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$v(x) = u(x) + \frac{M(u)}{2d} \|x\|^2.$$

Wówczas $\Delta v(x) = \Delta u(x) + M(u) \geq 0$. Na mocy Lematu 8.0.5, dla dowolnego $x \in \bar{\Omega}$ mamy

$$u(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} v \leq \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{r^2 M(u)}{2d}.$$

Następnie rozważmy funkcję

$$v_1(x) = -u(x) + \frac{M(u)}{2d} \|x\|^2.$$

Wtedy

$$\Delta v_1(x) = -\Delta u(x) + M(u) \leq 0.$$

Stąd

$$\max_{\bar{\Omega}}(v_1) \leq \max_{\partial\Omega}(v_1) \text{ oraz } -u \leq v_1.$$

Zatem dla dowolnego $x \in \bar{\Omega}$ mamy

$$-u(x) \leq \max_{\bar{\Omega}}(v) \leq \max_{\partial\Omega}(v) \leq \max_{\partial\Omega}(-u) + \frac{M(u)}{2d}r^2.$$

Stąd

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \max(u(x), -u(x)) \leq \max(\max_{\partial\Omega}(u), \max_{\partial\Omega}(-u)) + \frac{M(u)r^2}{2d} \\ &= \max_{\partial\Omega}|-u| + \frac{M(u)r^2}{2d}. \end{aligned}$$

■

Wniosek 8.0.9. *Niech u będzie rozwiązaniem (PD). Załóżmy, że f i F są ograniczone. Jeśli $\Omega \subset K(0, r)$, to*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega}|f| + \frac{r^2 \max_{\Omega}|F|}{2d}.$$

Twierdzenie 8.0.10. *(O ciągłej zależności rozwiązań od f i F) Niech $f, f_n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, F, F_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że $u, u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są odpowiednimi rozwiązaniami problemu Dirichleta dla danych funkcji f, F oraz f_n, F_n . Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ oraz $F_n \rightrightarrows F$, to $u_k \rightrightarrows u$.*

Dowód. Ponieważ

$$\begin{cases} \Delta(u - u_n)(x) = F(x) - F_n(x) & \text{dla } x \in \Omega \\ u(x) - u_n(x) = f(x) - f_n(x) & \text{dla } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

więc na mocy Wniosku 8.0.9 mamy

$$\max_{\bar{\Omega}}|u_k - u| \leq \max_{\partial\Omega}|f - f_n| + \frac{r^2 \max_{\Omega}|F - F_n|}{2d} \rightarrow 0,$$

gdzie $\Omega \subset K(0, r)$.

■

8.1 Metoda siatek

W następnej części wykładu omówimy numeryczną metodę rozwiązywania problemu Dirichleta (PD), zwaną metodą siatek. Metoda ta może być stosowana także do rozwiązywania innych zagadnień. Dla uproszczenia będziemy rozpatrywać tylko przypadek dwuwymiarowy.

Założmy, że Ω jest otwartym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem \mathbb{R}^2 . Ustalmy $h > 0$ (szerokość siatki) rozważmy punkty postaci:

$$(x_m, y_n) = (m \cdot h, n \cdot h), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

zwane węzłami siatki. Dla ustalonego węzła (x_m, y_n) mówimy, że węzły (x_{m-1}, y_n) , (x_{m+1}, y_n) , (x_m, y_{n-1}) , (x_m, y_{n+1}) są jego sąsiednimi. Oznaczmy

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_h &= \{(x_m, y_n) : (x_m, y_n) \in \overline{\Omega}\} \\ \Omega_h &= \{(x_m, y_n) \in \Omega : \text{wszystkie jego węzły sąsiednie leżą w } \widehat{\Omega}\} \\ \partial_h \Omega &= \widehat{\Omega}_h \setminus \Omega_h. \end{aligned}$$

Dla funkcji $\omega : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy laplasjan dyskretny

$$\begin{aligned} \Delta_h(\omega)(x_m, y_n) \\ = \frac{\omega(x_{m+1}, y_n) + \omega(x_{m-1}, y_n) + \omega(x_m, y_{n-1}) + \omega(x_m, y_{n+1}) - 4\omega(x_m, y_n)}{h^2}. \end{aligned}$$

Lemat 8.1.1. Niech $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy C^4 . Załóżmy, że istnieje $M > 0$ takie, że

$$\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| \leq M$$

dla $(x, y) \in \Omega$. Wówczas

$$|\Delta_h u(x_m, y_n) - \Delta u(x_m, y_n)| \leq \frac{h^2}{6} \cdot M \quad \text{dla } (x_m, y_n) \in \Omega_h.$$

Dowód. Niech $(x, y) = (x_m, y_n) \in \Omega_h$. Na mocy wzory Taylora otrzymujemy

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \cdot u_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x, y) + \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x, y) + \frac{h^4}{24} u_{xxxx}(\xi_1, y)$$

$$u(x, y+h) = u(x, y) + h \cdot u_y(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{yy}(x, y) + \frac{h^3}{6} u_{yyy}(x, y) + \frac{h^4}{24} u_{yyyy}(x, \eta_1)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \cdot u_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x, y) - \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x, y) + \frac{h^4}{24} u_{xxxx}(\xi_2, y)$$

$$u(x, y-h) = u(x, y) - h \cdot u_y(x, y) + \frac{h^2}{2} u_{yy}(x, y) - \frac{h^3}{6} u_{yyy}(x, y) + \frac{h^4}{24} u_{yyyy}(x, \eta_2).$$

Dodając stronami otrzymane równości otrzymamy

$$(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h)$$

$$= 4u(x, y) + h^2 \Delta u(x, y) + r_h,$$

gdzie

$$r_h = \frac{h^4}{24} (u_{xxxx}(\xi_1, y) + u_{yyyy}(x, \eta_1) + u_{xxxx}(\xi_2, y) + u_{yyyy}(x, \eta_2))$$

Jednak ze względu na założenie mamy

$$|r_h| \leq \frac{h^4}{6} \cdot M$$

■

Przypomnijmy, że problem Dirichleta polega na znalezieniu $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = F(x) & \text{dla } x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & \text{dla } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

gdzie $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są dane.

Rozważmy teraz dyskretną wersję tego problemu. Jednak zanim to uczynimy, musimy zmodyfikować f tak, aby była określona na $\partial_h \Omega$. Załóżmy, że $(x_m, y_n) \in \partial\Omega_h$. Wówczas któryś z węzłów sąsiednich $(x_{m'}, y_{n'}) \notin \bar{\Omega}$. Zatem istnieje $(x_m^0, y_n^0) \in \partial\Omega$, który leży na odcinku pomiędzy (x_m, y_n) a $(x_{m'}, y_{n'})$. Wówczas $\|(x_m, y_n) - (x_m^0, y_n^0)\| \leq h$. W ten sposób możemy zdefiniować $f_h : \partial_h \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f_h(x_m, y_n) = f(x_m^0, y_n^0).$$

Rozważmy dyskretny problem Dirichleta (schemat różnicowy): znaleźć funkcję $\omega : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że:

$$\begin{cases} \Delta_h \omega(x_m, y_n) = F(x_m, y_n) & \text{dla } (x_m, y_n) \in \Omega_h \\ \omega(x_m, y_n) = f_h(x_m, y_n) & \text{dla } (x_m, y_n) \in \partial_h \Omega. \end{cases} \quad (\text{DPD})$$

Problem ten jest liniowym układem równań o niewiadomych $\omega(x_m, y_n)$, gdzie $(x_m, y_n) \in \widehat{\Omega}_h$. Ponieważ niewiadomych jest tyle samo co równań (tzn. $\#\widehat{\Omega}_h$), aby udowodnić istnienie rozwiązania (DPD) wystarczy pokazać, że jedynym rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} \Delta_h \omega(x_m, y_n) = 0 & \text{dla } (x_m, y_n) \in \Omega_h \\ \omega(x_m, y_n) = 0 & \text{dla } (x_m, y_n) \in \partial_h \Omega \end{cases}$$

jest funkcja stała równa zeru.

Lemat 8.1.2. *Niech $\omega : \widehat{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli $\Delta_h \omega(x_m, y_n) \geq 0$ dla $(x_m, y_n) \in \Omega_h$, to*

$$\max_{\widehat{\Omega}_h} \omega \leq \max_{\partial_h \Omega} \omega.$$

Dowód. Z założenia mamy

$$\omega(x_m, y_n) \leq \frac{\omega(x_{m+1}, y_n) + \omega(x_{m-1}, y_n) + \omega(x_m, y_{n-1}) + \omega(x_m, y_{n+1})}{4}. \quad (8.1.1)$$

dla $(x_m, y_n) \in \Omega_h$. Niech $\omega_{max} = \max_{\widehat{\Omega}_h} \omega$. Jeśli $\omega(x_m, y_n) < \omega_{max}$, to teza lematu jest spełniona. Załóżmy więc, że ω_{max} jest osiągalne w pewnym węźle wewnętrznym $(x_m, y_n) \in \Omega_h$. Wówczas ze względu na (8.1.1), wartości w jego węzłach sąsiednich muszą być nie mniejsze niż $\omega(x_m, y_n)$, więc są one równe ω_{max} . Ponieważ wartości ω w węzłach sąsiednich dla (x_m, y_n) mają wartość ω_{max} , więc ich sąsiedzi przyjmują tę wartość. Ze względu na wypukłość i spójność Ω , powtarzając powyższe rozumowanie otrzymujemy, że $\omega(x_m, y_n) = \omega_{max}$ dla wszystkich $(x_m, y_n) \in \widehat{\Omega}_h$. Wtedy

$$\max_{\widehat{\Omega}_h} \omega = \omega_{max} = \max_{\partial_h \Omega} \omega$$

■

Stosując powyższy lemat dla ω , $-\omega$ otrzymujemy:

Twierdzenie 8.1.3. *(Zasada maksimum) Niech $\omega : \widehat{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli*

$$\Delta_h \omega(x_m, y_n) = 0 \text{ dla } (x_m, y_n) \in \Omega_h, \text{ to } \max_{\widehat{\Omega}_h} |\omega| = \max_{\partial_h \Omega} |\omega|.$$

Wniosek 8.1.4. *(DPD) ma tylko jedno rozwiązanie.*

Dowód. Jak już wcześniej wspomnieliśmy, wystarczy pokazać, że jeśli

$$\begin{cases} \Delta_h \omega(x_m, y_n) = 0 & \text{dla } (x_m, y_n) \in \Omega_h \\ \omega(x_m, y_n) = 0 & \text{dla } (x_m, y_n) \in \partial_h \Omega, \end{cases}$$

to $\omega(x_m, y_n) = 0$ dla $(x_m, y_n) \in \widehat{\Omega}_h$. Na mocy zasady maksimum mamy

$$\max_{\widehat{\Omega}_h} |\omega| \leq \max_{\partial \Omega_h} |\omega| = 0$$

więc $\omega(x_m, y_n) = 0$ dla $(x_m, y_n) \in \widehat{\Omega}_h$. ■

Twierdzenie 8.1.5. (Zasada maksimum II) Niech $u : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $M(\omega) = \max_{\Omega_h} |\Delta_h \omega|$. Jeśli $\Omega \subset K(0, r)$, to dla dowolnych $(x_m, y_n) \in \widehat{\Omega}_h$ mamy

$$|\omega(x_m, y_n)| \leq \max_{\partial_h \Omega} |\omega| + \frac{r^2 M(\omega)}{4}.$$

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu wersji niedyskretnej. Należy zastosować Lemat 8.1.2 dla funkcji

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= \omega(x, y) + \frac{M(\omega)}{4}(x^2 + y^2) \\ \omega_2(x, y) &= -\omega(x, y) + \frac{M(\omega)}{4}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Ponadto należy zauważyć, że

$$\begin{aligned} &\Delta_h(x^2 + y^2) \\ &= \frac{((x+h)^2 + y^2) + (x^2 + (y+h)^2) + ((x-h)^2 + y^2) + (x^2 + (y-h)^2) - 4(x^2 + y^2)}{h^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$
■

Twierdzenie 8.1.6. Niech $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ będzie rozwiązaniem (PD). Załóżmy, że $\Omega \subset K(0, r)$ oraz

$$\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| \leq M \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega.$$

Niech $\omega : \widehat{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem (DPD). Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje δ taka, że dla $h \leq \delta$ mamy

$$|u(x_m, y_n) - \omega(x_m, y_n)| \leq \varepsilon + \frac{r^2 h^2}{24} M$$

dla $(x_m, y_n) \in \Omega_h$.

Dowód. Rozważmy funkcję $v : \widehat{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$

$$v(x_m, y_n) = u(x_m, y_n) - \omega(x_m, y_n).$$

Wówczas dla dowolnego węzła brzegowego $(x_m, y_n) \in \partial_h \Omega$ mamy

$$\begin{aligned} |v(x_m, y_n)| &= |u(x_m, y_n) - \omega(x_m, y_n)| \\ &\leq |u(x_m, y_n) - u(x_m^0, y_n^0)| + |u(x_m^0, y_n^0) - \omega(x_m, y_n)| \\ &= |u(x_m, y_n) - u(x_m^0, y_n^0)| + |f(x_m^0, y_n^0) - f_h(x_m, y_n)| \\ &= |u(x_m, y_n) - u(x_m^0, y_n^0)|. \end{aligned}$$

Ponieważ $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ dobierzemy $\delta > 0$ takie, że

$$\forall_{p, q \in \Omega} \quad \|p - q\| \leq \delta \Rightarrow |u(p) - u(q)| < \varepsilon.$$

Założmy, że $h \leq \delta$. Ponieważ $\|(x_m, y_n) - (x_m^0, y_n^0)\| \leq h \leq \delta$, więc

$$|v(x_m, y_n)| \leq |u(x_m, y_n) - u(x_m^0, y_n^0)| < \varepsilon \text{ dla } (x_m, y_n) \in \partial_h \Omega$$

Ponadto, dla każdego $(x_m, y_n) \in \Omega_h$ mamy

$$\begin{aligned} |\Delta_h v(x_m, y_n)| &\leq |\Delta_h u(x_m, y_n) - \Delta u(x_m, y_n)| + |\Delta u(x_m, y_n) - \Delta_h \omega(x_m, y_n)| \\ &\leq |\Delta_h u(x_m, y_n) - \Delta u(x_m, y_n)| \leq \frac{h^2}{6} M. \end{aligned}$$

Podsumowując, jeśli $h \leq \delta$, to

$$\max_{\partial_h \Omega} |v| < \varepsilon \text{ oraz } \max_{\Omega_h} |\Delta_h v| \leq \frac{h^2}{6} M$$

Zatem na mocy Zasady maksimum II otrzymujemy

$$|v(x_m, y_n)| \leq \varepsilon + \frac{r^2 h^2}{24} M \text{ dla } (x_m, y_n) \in \widehat{\Omega}_h.$$

■

Literatura

- [1] J. Ombach, *Wykłady z Równań Różniczkowych*.
- [2] A. Palczewski, *Równania Różniczkowe zwyczajne*.
- [3] A. Ralston, *Wstęp do Analizy Numerycznej*.