Tekst powstał w związku z odczytami wygłoszonymi przez Autorów na XXXIII Szkole Matematyki Poglądowej *Metody klasyczne i współczesne*, sierpień 2004.

Równanie Laplace'a

Witold SADOWSKI, Paweł STRZELECKI, Anna ZATORSKA–GOLDSTEIN, Warszawa

Równanie Laplace'a

(1) $$\Delta u = 0 \qquad \text{w obszarze } \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

gdzie $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ oznacza laplasjan, tzn. sumę wszystkich czystych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcji u, jest jednym z najsłynniejszych równań różniczkowych cząstkowych. Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest wielość jego interpretacji fizycznych: równanie Laplace'a spełnia m.in. potencjał pola elektrostatycznego w obszarze pozbawionym ładunków oraz temperatura ciała znajdującego w stanie równowagi cieplnej. Równanie Laplace'a pojawia się także w teorii funkcji analitycznych, teorii potencjału i matematycznym opisie ruchów Browna; wiążą się z nim zmagania wielu znanych matematyków i pytania, które w XX wieku doprowadziły do burzliwego rozwoju rachunku wariacyjnego i teorii równań różniczkowych, umożliwiając zaprzęgnięcie do nich niezwykle elastycznych metod analizy funkcjonalnej.

Słowem, równanie Laplace'a jest niczym Stendhalowskie zwierciadło przechadzające się po gościńcu: odbija się w nim historia olbrzymiej części analizy matematycznej, a także fragmenty dalekosiężnych teorii, o których przed stu pięćdziesięciu laty nikomu się nie śniło. Cząstkę tego odbicia spróbujemy – z konieczności nieudolnie – przedstawić Czytelnikom tego tekstu.

1. W stronę Poincarégo

W tej części artykułu zajmiemy się omówieniem jednej z metod rozwiązywania zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a, tj. zadania, które polega na znajdowaniu takiej funkcji $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ spełniającej równanie (1), która na brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω przyjmuje z góry zadane wartości. Będziemy rozważać *wyłącznie* klasyczne rozwiązania równania Laplace'a, tzw. funkcje *harmoniczne*: z definicji są one klasy C^2 wewnątrz Ω i spełniają równość (1) w każdym punkcie $x \in \Omega$.

Założymy też dla uproszczenia, że obszar Ω jest ograniczony i ma brzeg klasy C^2. W 1890 roku Henri Poincaré udowodnił następujące piękne twierdzenie.

Twierdzenie. *Dla każdej funkcji ciągłej $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, która na $\partial\Omega$ jest równa funkcji g, a wewnątrz Ω jest harmoniczna. Ponadto, $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Wynik Poincarégo stanowi w jakimś sensie pomost między epokami klasyczną i współczesną w całej teorii równań różniczkowych cząstkowych. Gdyby to twierdzenie udowodniono kilkanaście lat później, Hilbert być może wcale nie sformułowałby swego XIX problemu. Narzędzia, których Poincaré używał w dowodzie, wyrastają z różnych konkretnych, twardych, bardzo klasycznych rachunków – rachunków długich i męczących na tyle, by liczne osoby ostatecznie zrazić do równań różniczkowych cząstkowych. Jednak w samym dowodzie rachunki w ogóle już nie są istotne: znaczenie mają tylko perspektywa i doświadczenie, które zdobywa każdy, kto przez początkową zaporę całek i skomplikowanych wzorów przebrnie. Liczą się tylko, w sposób szalenie współczesny, obiekty i ich własności. Czym owe obiekty są – stołami, krzesłami czy kuflami z piwem – nie ma już najmniejszego znaczenia.

Spróbujemy zatem prześledzić drogę do twierdzenia Poincarégo wygodnie, niczym turysta, który nie wykręca kostek na piargach i nie moczy butów na lodowcu, tylko w pogodny dzień napawa się widokiem z helikoptera.

Przystanek 1: całka z pochodnej normalnej. Rozpoczniemy od jednej z wersji twierdzenia Stokesa – twierdzenia Gaussa o dywergencji:

(2) $$\int_\Omega \operatorname{div} V\, dx = \int_{\partial\Omega} V \cdot n \, d\sigma,$$

gdzie V jest polem wektorowym klasy C^1, n oznacza wektor normalny zewnętrzny na brzegu obszaru Ω, a $d\sigma$ – naturalną miarę powierzchniową. Wstawiając za V gradient funkcji harmonicznej u, otrzymujemy

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma. \tag{3}$$

(Lewa strona równości (2) znika, gdyż $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u = 0$.) Taka tożsamość jest spełniona dla dowolnego obszaru Ω, w którym funkcja u jest harmoniczna (o ile jej gradient jest ciągły na $\partial\Omega$).

Przystanek 2: własność wartości średniej i zasada maksimum. Nietrudnym wnioskiem z (3) jest

Twierdzenie (własność wartości średniej). *Jeśli $u \in C^2(\Omega)$ jest harmoniczna, to dla dowolnego punktu $y \in \Omega$ i dowolnego promienia $R < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$ zachodzą równości*

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(y,R)} u(x)\, dx, \tag{4}$$

gdzie $\omega_n = |B^n(0,1)|$ jest miarą Lebesgue'a kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$.

Całka we wzorze (4) jest wartością średnią u w kuli $B(y,R)$. Twierdzenie orzeka, że owa średnia jest równa wartości przyjmowanej przez u w środku kuli.

Dla dowodu oblicza się pochodną prawej strony względem R. Trzeba dokonać takiej afinicznej zamiany zmiennych, by całkować po kuli jednostkowej, a później zróżniczkować pod znakiem całki i przekonać się, że dzięki zależności (3) stosowanej dla sfer o środku w zerze mamy

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(y,R)} u(x)\, dx\right) = 0.$$

To oznacza, że wartość średnia u w kuli $B(0,R)$ w ogóle nie zależy od R. Przechodząc do granicy $R \to 0$, kończymy dowód.

Z własności wartości średniej wynika natychmiast *zasada maksimum*, głosząca, że funkcja harmoniczna w obszarze Ω i ciągła na jego domknięciu $\overline{\Omega}$ przyjmuje swoje kresy na brzegu tego obszaru. Jeśli bowiem $M = \sup_\Omega u$, to zbiór

$$\Omega_M :\, = \{x \in \Omega :\ u(x) = M\}$$

jest naraz i domknięty (co wynika z ciągłości u), i otwarty (tu korzysta się z własności wartości średniej). Jeśli więc $\Omega_M \neq \emptyset$, to $\Omega_M = \Omega$, tzn. u jest stała. Jeśli zaś u nie jest stała, to nie może mieć maksimów (ani minimów) lokalnych wewnątrz Ω.

Z zasady maksimum wynika, że zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Gdyby miało dwa rozwiązania, to ich różnica, dzięki liniowości równania Laplace'a, też byłaby funkcją harmoniczną i znikałaby na brzegu obszaru – miałaby więc na $\partial\Omega$ kres górny i dolny równy zero, a więc, na mocy zasady maksimum, znikałaby tożsamościowo.

Zauważmy jeszcze jedno: ponieważ w dowodzie zasady maksimum nie korzysta się bezpośrednio ani z równania Laplace'a, ani z istnienia drugich pochodnych cząstkowych u, to zachodzi ona dla każdej funkcji ciągłej mającej własność wartości średniej.

Przystanek 3. Naturalnym zabiegiem, który wykonuje matematyk, rozpatrując jakiekolwiek równanie różniczkowe cząstkowe, jest poszukiwanie szczególnych rozwiązań tego równania, np. rozwiązań jakiejś określonej, prostej postaci. Ponieważ równanie Laplace'a jest niezmiennicze ze względu na obroty, więc naturalną rzeczą jest poszukiwanie rozwiązań zależnych tylko od $r = |x|$. Wypisując laplasjan we współrzędnych biegunowych i całkując łatwe równanie różniczkowe zwyczajne przekonujemy się, że

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n = 2 \end{cases}$$

spełnia równanie Laplace'a w $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.W szczególności dla $n = 3$ mamy $\Gamma(x) = -|x|^{-1}/4\pi$ (proszę przypomnieć sobie szkolny wzór na potencjał pola elektrostatycznego wytwarzanego przez punktowy ładunek). Stałe mają charakter normalizacyjny; ich rola stanie się jasna za chwilę.

Z twierdzenia Gaussa, kładąc w nim $V = u\nabla w - w\nabla u$, uzyskuje się tzw. drugi wzór Greena

$$\int_\Omega (u\Delta w - w\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{5}$$

Wstawiając $\Gamma(x-y)$ w miejsce $w(x)$ otrzymujemy, po nietrudnych rachunkach i zabawie koniecznej do ominięcia kłopotliwej osobliwości Γ w zerze, następujący wynik.

Twierdzenie. *Jeśli Ω jest obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$ z brzegiem klasy C^1, to dla dowolnego punktu $y \in \Omega$ i dla dowolnej funkcji $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takiej, że Δu jest funkcją ograniczoną Ω ma miejsce równość*

$$u(y) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial n} - \Gamma\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma(x). \tag{6}$$

Jeśli u jest harmoniczna, to pierwsza całka znika i mamy *nieomal* gotowy przepis na odczytywanie wartości u w dowolnym punkcie $y \in \Omega$. Kłopot jest jeden: z zasady maksimum wynika, że do określenia funkcji harmonicznej u (ogólniej: funkcji, której laplasjan jest znany) *wystarczy znać wartości* $u\big|_{\partial\Omega}$. Wartości pochodnej normalnej na brzegu obszaru wcale nie można zadać w dowolny sposób, co więcej: nie sposób w ogóle jej obliczyć, znając tylko wartości samej funkcji u na $\partial\Omega$ i nie wiedząc, jak u wygląda wewnątrz obszaru.

Przystanek 4: funkcja Greena i wzór Poissona. Aby wspomnianą przed chwilą przeszkodę ominąć, trzeba zauważyć, że w ostatnim twierdzeniu teza się nie zmieni, gdy zamiast Γ użyjemy funkcji

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x),$$

gdzie h jest dowolną funkcją harmoniczną. To jest łatwy wniosek z dowodu. Gdyby więc, przy ustalonym $y \in \Omega$, udało się tak dobrać funkcję harmoniczną h, by mieć

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } x \in \partial\Omega,$$

to wzór (6) uprościłby się do eleganckiego przepisu na rozwiązanie zagadnienia Dirichleta

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\, d\sigma(x). \tag{7}$$

Wprawdzie, jak zauważyłby uważny pesymista, problem dobierania poprawki harmonicznej h w taki sposób, by *funkcja Greena* $G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x)$ znikała na $\partial\Omega$, jest równoważny zagadnieniu Dirichleta (bo wszak h ma być funkcją harmoniczną o zadanych wartościach na brzegu), ale – na szczęście! – dla dostatecznie prostych i symetrycznych obszarów można poprawkę h łatwo odgadnąć.

Jednym z takich szczęśliwych obszarów jest kula. Odgadywanie poprawki harmonicznej h i funkcji Greena dla kuli jest w istocie zadaniem z geometrii. Oto wynik: gdy $\Omega = B(0,R)$, to pochodna normalna funkcji Greena, niezbędna do wypisania (7), wynosi

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R|x-y|^n} =: K_R(x,y) \qquad \text{dla } x \in \partial\Omega \text{ i } y \in \Omega.$$

Co więcej, tzw. wzór Poissona

$$u(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B(0,R)} K_R(x,y)g(x)\, d\sigma(x), & y \in B(0,R); \\ g(y), & y \in \partial B(0,R) \end{cases} \tag{8}$$

określa funkcję u ciągłą na domknięciu kuli i harmoniczną w jej wnętrzu. Dowód tego twierdzenia, gdy wzór na jądro Poissona K_R jest już znany, nie jest szczególnie trudny.

Ktoś rzekłby, tyle trudu (który oglądamy na szczęście w telegraficznym skrócie), a nauczyliśmy się jedynie rozwiązywać zagadnienie Dirichleta dla kuli... Na szczęście, jawne wzory mają swoje zalety. Dzięki nim przyszła pora na

Przystanek 5: żniwa. Ze wzoru Poissona wynika po pierwsze, że każda funkcja harmoniczna jest klasy C^∞, a nawet analityczna w sensie rzeczywistym, gdyż funkcja podcałkowa w tym wzorze w taki właśnie sposób zależy od zmiennej y. Po drugie, wynika zeń, że każda funkcja w ciągła w obszarze Ω, która na dowolnej kuli w Ω ma własność wartości średniej, tzn. zachodzi dla niej równość (4), musi być w Ω harmoniczna.

Aby się o tym przekonać, weźmy dowolną kulę otwartą B, której domknięcie zawiera się w Ω. Określmy wzorem Poissona funkcję $h \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ harmoniczną w kuli B i równą w na ∂B. Funkcja $u = w - h$ ma w kuli B (i wszystkich kulach w niej zawartych) własność wartości średniej, spełnia więc zasadę maksimum. Ale $u = 0$ na ∂B, więc u znika w B, co oznacza, że $w = h$ jest harmoniczna w B.

Po trzecie, dla punktów y z nieco mniejszej kuli $B(0, R/2)$ i wszystkich $x \in \partial B(0, R)$ jądro Poissona, z dokładnością do stałego czynnika, jest równe R^{1-n}; ściślej, istnieją dwie stałe dodatnie C_1 i C_2 takie, że

$$C_1 R^{1-n} \le K_R(x, y) \le C_2 K_R(x, y) \qquad \text{dla } y \in B(0, R/2) \text{ i } x \in \partial B(0, R).$$

Jeśli więc u jest *dodatnia* na $\partial B(0, R)$ (a zatem, z zasady maksimum, dodatnia w całej kuli), to wartości u we wszystkich punktach mniejszej kuli $B(0, R/2)$ są porównywalne (bo porównywalne są funkcje podcałkowe we wzorze Poissona). Ściślej,

$$\sup_{B_{R/2}} u \le C \inf_{B_{R/2}} u$$

dla pewnej stałej C, zależnej jedynie od wymiaru przestrzeni. Jest to tzw. nierówność Harnacka. Oczywiście zamiast $R/2$ można, kosztem stałej, wziąć promień λR dla dowolnego $\lambda \in (0, 1)$.

Stąd wypływają kolejne wnioski: monotoniczny ciąg funkcji (u_j) harmonicznych, który jest zbieżny choćby w jednym punkcie y obszaru Ω, jest zbieżny niemal jednostajnie (nierówność Harnacka, stosowana do mających stały znak funkcji $u_j - u_k$, pokazuje, że lokalnie jest spełniony jednostajny warunek Cauchy'ego), a jego granica też jest funkcją harmoniczną (bo skoro zbieżność jest niemal jednostajna, to własność wartości średniej jest w granicy zachowana). W zbliżony sposób dowodzi się, że każdy wspólnie ograniczony ciąg funkcji harmonicznych ma podciąg, który jest niemal jednostajnie zbieżny – z pochodnymi cząstkowymi wszystkich rzędów! – do funkcji harmonicznej.

Widać teraz, jak potężnym warunkiem jest harmoniczność. To dzięki niej ze skąpych informacji o zachowaniu samych funkcji czerpiemy wiedzę o zbieżności pochodnych, o gładkości granicy, o tym, że $u = \lim u_j$ spełnia to samo równanie różniczkowe, które spełniają funkcje u_j.

Przystanek 6: szkic dowodu twierdzenia Poincarégo. Pomysł Poincarégo polega na tym, by umiejętność rozwiązywania równania Laplace'a w dowolnej kuli, oraz wypływającą z niej wiedzę o ciągach funkcji harmonicznych, wykorzystać do rozwiązania zagadnienia Dirichleta w dowolnym obszarze.
W skrócie: skoro umiemy produkować funkcje harmoniczne na kuli, a ciągi funkcji harmonicznych zachowują się bardzo przyzwoicie, to weźmy jakąkolwiek funkcję spełniającą warunek brzegowy i poprawiajmy ją nieskończenie wiele razy na różnych kulach zawartych w obszarze, a w granicy otrzymamy rozwiązanie zagadnienia Dirichleta.

Oto nieco dokładniejszy opis. Przedstawmy (w dowolny sposób) Ω jako przeliczalną sumę zawartych w Ω kul *domkniętych*,

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots, \qquad B_i \subset \Omega \text{ dla wszystkich } i.$$

Niech $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 \ldots$ będzie takim ciągiem liczb naturalnych, w którym każda liczba naturalna występuje nieskończenie wiele razy. Można wziąć np. ciąg

12123123412345... Rozważmy skojarzony z takim ciągiem $(i_k)_{k=1,2,\ldots}$ ciąg operatorów

$$P_k\colon C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$$

zdefiniowanych następująco: jeśli u jest dowolną funkcją ciągłą na domknięciu obszaru Ω, to

$$P_k u(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus B_{i_k}, \\ h(x), & x \in B_{i_k} \quad \text{gdzie } \Delta h = 0 \text{ w } B_{i_k} \text{ i } h = u \text{ na } \partial B_{i_k} \end{cases}$$

Innymi słowy, operator P_k nie zmienia wartości u poza kulą B_{i_k}, natomiast w B_{i_k} zastępuje u funkcją harmoniczną, dbając o to, by sklejenie na brzegu kuli B_{i_k} odbyło się w sposób ciągły.

Korzystając z twierdzenia Tietzego, załóżmy bez zmniejszenia ogólności, że warunek brzegowy Dirichleta $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jest w istocie określony na całym $\overline{\Omega}$. Określmy rekurencyjnie ciąg funkcji

$$u_0 := g, \quad u_1 := P_1 u_0, \quad u_2 := P_2 u_1, \quad \ldots, \quad u_k := P_k u_{k-1}, \quad \ldots$$

Poincaré wykazał, że ciąg u_k jest zbieżny jednostajnie, a jego granica jest funkcją harmoniczną w Ω, równą g na brzegu obszaru Ω. O tym, że zagadnienie Dirichleta ma co najwyżej jedno rozwiązanie, które w dodatku (o ile istnieje) musi być klasy C^∞, dowiedzieliśmy się już wcześniej.

Gdy już się udowodni, że ciąg u_k jest jednostajnie zbieżny, to harmoniczność jego granicy jest właściwie oczywista: na każdej z kul B_j pewien podciąg u_k – o tych numerach k, dla których $i_k = j$ – składa się z funkcji harmonicznych w B_j, więc jego granica jest harmoniczna. Oto szkic dowodu zbieżności ciągu u_k.

Krok 1. Gdy g jest klasy C^2 i ponadto $\Delta g \geq 0$ w Ω, to wtedy korzystając z zasady maksimum stosunkowo łatwo dowodzi się, że ciąg u_k jest rosnący i ograniczony z góry przez np. $\sup g$. Dla ustalonego j podciąg u_k numerowany tylko tymi k, dla których $i_k = j$, jest więc *w kuli* B_j monotonicznym ciągiem funkcji harmonicznych. Ze wspomnianego wyżej twierdzenia Harnacka wynika jego zbieżność w B_j, a z monotoniczności *całego* ciągu u_k – żądany wynik.

Krok 2. Gdy g jest klasy C^2, ale nie wiemy, jaki jest znak laplasjanu g, to rozważamy funkcję $\tilde{g} = g + c_0|x|^2$. Dla odpowiednio dużej stałej c_0 ma ona dodatni laplasjan. Dowód, dzięki krokowi pierwszemu, powiedzie się zarówno dla ciągu u_k, w którym weźmiemy $u_0 = \tilde{g}$, jak i dla ciągu u_k, w którym weźmiemy $u_0 = c_0|x|^2$. Zatem, dzięki liniowości równania Laplace'a i rozpatrywanych operatorów P_k, powiedzie się także dla $u_0 = g$.

Krok 3. W ogólnym przypadku potrzebny jest niezbyt skomplikowany argument aproksymacyjny, wykorzystujący gęstość funkcji klasy $C^2(\Omega)$ wśród wszystkich funkcji ciągłych na domknięciu obszaru Ω.

Gładkość brzegu jest potrzebna, by wykazać, że mimo nieskończonej liczby poprawek we wnętrzu obszaru nic nie psuje się przy brzegu i funkcja $u = \lim u_k$ też spełnia ten sam warunek brzegowy, co wszystkie g_k (co wcale nie jest rzeczą oczywistą). Założenie $\partial\Omega \in C^2$ jest zresztą zbyt silne, ale to temat na inną, długą opowieść.

2. Metody wariacyjne

Mówiąc o równaniu Laplace'a i o sposobach rozwiązywania, nie sposób nie wspomnieć o metodach wariacyjnych. Zagadnienia wariacyjne dotyczą problemu minimalizacji funkcjonałów postaci

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\mathrm{d}x, \tag{9}$$

gdzie Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, u jest funkcją określoną na Ω o wartościach rzeczywistych (w ogólnym *przypadku wektorowym*, którym na razie nie będziemy się zajmować, funkcją o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^m$), a $f = f(x, s, \xi)$, tzw. lagranżjan, jest funkcją określoną na $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ o wartościach rzeczywistych.

Ekstremów funkcji n zmiennych rzeczywistych szukamy, obliczając pochodną i przyrównując ją do zera. Podobna procedura dla funkcjonałów, zależnych od *funkcyjnej*, nieskończenie wymiarowej zmiennej u, prowadzi do tzw. równań Eulera-Lagrange'a

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x,u,\nabla u)\right)=\frac{\partial f}{\partial s}(x,u,\nabla u).$$

Funkcja u minimalizująca funkcjonał (9) spełnia powyższe równanie. W ten sposób dostajemy naturalny związek między zagadnieniami wariacyjnymi a równaniami różniczkowymi cząstkowymi, zwłaszcza z pewną ich klasą, tzw. równaniami eliptycznymi.

Modelowym przykładem jest funkcjonał Dirichleta

$$F(u)=\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

Rozpatrzmy problem minimalizacji tego funkcjonału przy zadanym warunku brzegowym. Innymi słowy: wśród wszystkich funkcji $u:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, spełniających warunek

$$u=u_0 \qquad \text{na brzegu } \partial\Omega \text{ obszaru } \Omega,$$

gdzie u_0 jest ustalona, chcemy znaleźć tę, dla której funkcjonał osiąga najmniejszą wartość. Gdy u jest potencjałem pola elektrostatycznego w obszarze pozbawionym ładunków, to funkcjonał F jest energią pola, a równanie Eulera–Lagrange'a dla F to właśnie równanie Laplace'a

$$\Delta u=0 \quad \text{na zbiorze} \quad \Omega$$

uzupełnione warunkiem brzegowym

$$u=u_0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega.$$

Tzw. zasada Dirichleta głosi, że

Twierdzenie. *Rozwiązaniem równania Laplace'a jest funkcja u minimalizująca funkcjonał Dirichleta.*

Pojawiają się jednak naturalne pytania:

1. Czy w ogóle istnieje kres dolny wartości tego funkcjonału?
2. Czy minimum jest osiągane dla pewnej funkcji u?

Pytanie 1 wymaga przyjęcia pewnych założeń o funkcjonale. Jednym z naturalnych założeń jest wypukłość funkcji podcałkowej $f=f(x,s,\xi)$ względem trzeciej zmiennej. W przypadku skalarnym, gdy $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$, taką wypukłość gwarantuje np. warunek **silnej eliptyczności**

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\eta_i\eta_j>0 \qquad \text{dla} \quad \eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \eta\neq 0;$$

Dla funkcjonału Dirichleta ten warunek jest spełniony: $f=f(\xi)=|\xi|^2$. Zagadnienie wariacyjne, w którym funkcjonał spełnia warunek silnej eliptyczności, nazywamy **regularnym**.

Pytanie 2 wiąże się dodatkowo z pytaniem, dla jakich funkcji u całka z kwadratu gradientu jest skończona. Te pytania prowadzą nas do pojęcia tzw. **słabego rozwiązania**.

W podanym przykładzie funkcjonału Dirichleta funkcji minimalizującej możnaby poszukiwać w przestrzeni C^1. Jest to jednak zły pomysł. Wprawdzie C^1 jest, ze swą naturalną topologią, przestrzenią Banacha, lecz zbiory domknięte $\{\int|\nabla u|^2\,dx\le t\}$ nie są w tej topologii zwarte! Brak więc naturalnego narzędzia, które pozwalałoby dowodzić, że minimum jest osiągane. Trzeba dobrać inną, odpowiednią przestrzeń funkcyjną; okazuje się, że jest nią przestrzeń Sobolewa $W^{1,2}(\Omega)$. Aby podać jej definicję, zaczniemy od ważnego pojęcia:

Słabym gradientem funkcji f nazywamy funkcję $v:\Omega\to\mathbb{R}^n$, spełniającą równość

$$\int_\Omega u\cdot\nabla\phi\,dx=-\int_\Omega v\,\phi\,dx$$

dla każdej funkcji $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Łatwo zauważyć, że jeżeli funkcja u jest różniczkowalna, to jej klasyczny gradient jest równy słabemu gradientowi, a podany wyżej wzór bierze się z całkowania przez części i wykorzystania tego, że funkcja ϕ ma zwarty nośnik. Dlatego też słaby gradient oznaczamy ∇u, tak samo, jak gradient rozumiany klasycznie. Możemy teraz powiedzieć, że przestrzeń Sobolewa $W^{1,2}(\Omega)$ jest przestrzenią tych funkcji całkowalnych z kwadratem, których słabe gradienty są również całkowalne z kwadratem. Jest to przestrzeń Banacha z normą

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Przez $W_0^{1,2}(\Omega)$ będziemy oznaczać domknięcie przestrzeni C_0^∞ w $W^{1,2}$.

Twierdzenie. *W przestrzeni Sobolewa $W^{1,2}(\Omega)$ istnieje funkcja u taka, że $u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, która minimalizuje funkcjonał Dirichleta.*

(Dowód nie jest trudny. Trzeba wiedzieć, że ograniczony ciąg w przestrzeni L^2 zawiera podciąg zbieżny w słabej topologii.)

Taką funkcję będziemy nazywać **słabym rozwiązaniem** zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a. No dobrze, ale jak ono się ma do klasycznego rozwiązania? Chcielibyśmy przecież, aby funkcja będąca rozwiązaniem była co najmniej dwukrotnie różniczkowalna... inaczej napis $\Delta u = 0$ traci cały swój klasyczny sens. Na szczęście tak jest – słynne twierdzenie zwane lematem Weyla głosi bowiem, że

Twierdzenie [Weyl]**.** *Słabe rozwiązanie u problemu Dirichleta jest funkcją gładką (klasy $\mathcal{C}^\infty$).*

(Teza zachodzi przy ogólniejszych założeniach: każda dystrybucja, która spełnia równanie Laplace'a w sensie dystrybucyjnym, jest w istocie gładkim, klasycznym rozwiązaniem równania Laplace'a.)

Naszkicujemy teraz dowód powyższego twierdzenia. Korzystać będziemy z tego, że słabe rozwiązanie równania Laplace'a spełnia następującą równość

$$(*) \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = 0$$

dla dowolnej funkcji gładkiej φ o zwartym nośniku w Ω. O funkcjach φ możemy myśleć jak o nieskończenie wielu testach, z których każdy sprawdza, czy u spełnia równanie Laplace'a: jeśli u pomyślnie przejdzie wszystkie testy, to znaczy, że jest rozwiązaniem (słabym). Aby wykazać, że funkcja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ spełniająca wszystkie testy jest gładka, wykażemy najpierw, że spełnia ona tzw. nierówność Caccioppoli, która stanowi swoiste przeciwieństwo nierówności Poincarégo: szacuje mianowicie normę gradientu funkcji u w L^2 poprzez normę samej funkcji u w L^2 liczonej jednak na większym zbiorze:

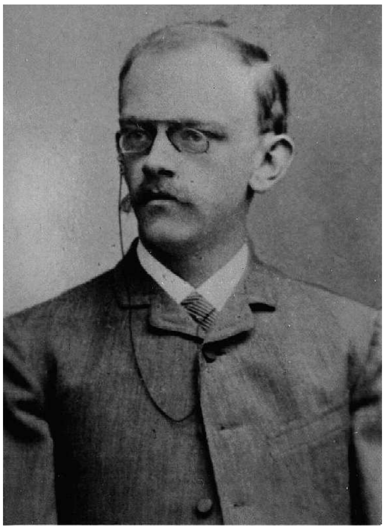
$$(**) \qquad \int_{B(R')} |\nabla u|^2 \leq C \int_{B(R)} |u|^2,$$

gdzie $B(R)$ oraz $B(R')$ są kulami o wspólnym środku i promieniach R oraz R' ($R' < R$) zawartymi w Ω, a stała $C > 0$ nie zależy od funkcji u.

Wykażemy najpierw nierówność $(**)$ dla gładkiej funkcji u spełniającej $(*)$. Niech ϕ będzie funkcją gładką, która zeruje się poza $B(R)$, jest równa 1 na $B(R')$, przyjmuje wartości tylko z przedziału $[0, 1]$ oraz jej gradient spełnia nierówność $|\nabla\phi| \leq \frac{2}{R-R'}$. (Taka funkcja oczywiście istnieje, co łatwo zrozumieć, wyobrażając sobie ścięty stożek po odpowiednim wygładzeniu kantów). Przyjmijmy w $(*)$ jako funkcję testującą $\varphi = u\phi^2$. Otrzymamy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2|\phi|^2 \leq 2\int_\Omega (|\nabla u||\phi|)(|\nabla\phi||u|).$$

Z nierówności Schwarza zastosowanej dla prawej strony (po podzieleniu obu stron przez $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2|\phi|^2\right)^{1/2}$ i skorzystaniu z własności ϕ) otrzymujemy z łatwością $(**)$ ze stałą $C = \frac{16}{(R-R')^2}$. Skoro u było gładkie i harmoniczne (tj. spełniało równanie Laplace'a), to także pochodne u są gładkie i harmoniczne, więc rozumowanie możemy powtórzyć w odniesieniu do nich i uzyskać szereg



David Hilbert (1862–1943)

nierówności

$$(***) \qquad \cdots \le C'' \int_{B(R'')} |\nabla^2 u|^2 \le C' \int_{B(R')} |\nabla u|^2 \le C \int_{B(R)} |u|^2.$$

Gdybyśmy powyższy ciąg nierówności uzyskali tylko przy założeniu, że funkcja u należy do $W^{1,2}(\Omega)$, to dowód byłby już zakończony. Istotnie, z $(***)$ wynika, że u należy do przestrzeni Sobolewa $W^{k,2}(\Omega)$ dla każdego k naturalnego, więc u musi być funkcją gładką. Niestety, ciąg nierówności $(***)$ udowodniliśmy przy założeniu gładkości u. Nie jest to jednak duży problem, gdyż łatwo można sprawdzić, że ciąg $\tilde{u}_k = u \star \phi_{1/k}$ gładkich przybliżeń funkcji u, uzyskanych przez splatanie u z tzw. aproksymatywną jednością, też spełnia równanie $(*)$ dla dowolnego $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, a zatem spełnia również $(***)$. Stąd dla samej funkcji u – jako dla granicy tego ciągu – także zachodzi ciąg nierówności $(***)$. W konsekwencji u jest gładkie. Koniec dowodu.

W dalszej części przyjrzymy się pokrótce metodom wariacyjnym, ich rozwojowi i problemom z nimi związanym, począwszy od słynnego wykładu Dawida Hilberta na kongresie matematycznym w roku 1900 w Paryżu. Trzy z jego problemów dotyczą zagadnień wariacyjnych: XIX, XX oraz XXIII. Zacytujmy w wolnym przekładzie fragmenty dwóch pierwszych:

XX problem: *Czy każdy regularny problem wariacyjny ma rozwiązania, przy odpowiednich założeniach na warunek brzegowy (np. że funkcje występujące w warunkach brzegowych są ciągłe i kawałkami różniczkowalne jeden lub więcej razy) i, w razie potrzeby, odpowiednim rozszerzeniu pojęcia rozwiązania?*

XIX problem: *W geometrii, mechanice i fizyce matematycznej rolę grają głównie regularne problemy wariacyjne; powstaje naturalne pytanie: czy wszystkie takie problemy dopuszczają jedynie analityczne rozwiązania? I czy jest tak również wtedy, gdy rozwiązań szukamy, jak w problemie Dirichleta z funkcją potencjału, wśród funkcji z warunkiem brzegowym ciągłym, ale nie analitycznym?*

Problemy te celowo zostały zacytowane w odwrotnej kolejności. Pierwszy z nich dotyczy istnienia rozwiązań zagadnień wariacyjnych, drugi – regularności rozwiązań. Problemy Hilberta przyspieszyły rozwój dziedziny matematyki nazywanej rachunkiem wariacyjnym oraz innych dziedzin z nią związanych – szczególnie teorii nieliniowych eliptycznych równań cząstkowych drugiego rzędu. Przyjrzyjmy się najważniejszym wynikom, którymi zaowocowało poszukiwanie odpowiedzi na powyższe pytania.

3. Oszacowania a priori

Tzw. oszacowania a priori wiążą się z nieformalną zasadą, która głosi, że *jeśli można pokazać, że rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego spełniają odpowiednie oszacowania – nie sprawdzając wcześniej, że owe rozwiązania istnieją – to rozwiązania rzeczywiście istnieją.*

Podobnie możemy dowodzić wyższą regularność rozwiązań: opierając się na założeniu, że takie rozwiązania istnieją.

Wprowadzenie tej metody, która do dzisiaj pełni centralną rolę w teorii istnienia i regularności rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych, zawdzięczamy S. Bernsteinowi, który najpierw, w roku 1904, wykazał, że w $\mathbb{R}^2$ każde rozwiązanie klasy C^3 nieliniowego równania eliptycznego o współczynnikach analitycznych jest funkcją analityczną, a następnie w latach 1906–12 napisał szereg ważnych prac dotyczących istnienia rozwiązań.

Wyniki Bernsteina dały początek serii prac dotyczących zagadnień istnienia i regularności dla nieliniowych równań eliptycznych, w których funkcja niewiadoma zależy od dwóch zmiennych. Liechtenstein w roku 1912 wykazał, że rozwiązania klasy C^2 równania nieliniowego są klasy C^3 (a więc analityczne), a w roku 1929 Hopf – że rozwiązania hölderowskie (klasy $C^{1,\alpha}$) są klasy C^2 (a więc analityczne).

Inne pracy dotyczyły uogólnień na przypadki większej ilości zmiennych oraz układów równań eliptycznych. Dla zrozumienia ważności oszacowań a priori szczególnie istotne były prace Leraya, Schaudera i Caccioppoli.

W pracy z roku 1934 Leray i Schauder wprowadzili schemat linearyzacji wyjściowego równania nieliniowego i zredukowali problem znalezienia rozwiązania dla tegoż równania nieliniowego do zagadnienia znalezienia punktu stałego pewnego operatora liniowego. (Jest to najważniejsze zastosowanie twierdzenia Schaudera o punkcie stałym.) Pokazali też, że uzyskiwanie oszacowań a priori (dla rozwiązań wyjściowego równania nieliniowego oraz dla rozwiązań problemu zlinearyzowanego) otwiera drogę do twierdzeń o istnieniu.

Podstawowe oszacowania a priori dla liniowych równań eliptycznych zawdzięczamy Schauderowi. W przypadku równań nieliniowych nie ma żadnej ogólnej metody znajdowania takich oszacowań; walka o ich uzyskanie jest za każdym razem głównym wysiłkiem matematyka zmagającego się z tym czy innym konkretnym równaniem.

Oszacowania typu Caccioppoli są szczególnie ważne w teorii regularności. Najprostszy przykład tego typu oszacowań to wyprowadzona wcześniej nierówność Caccioppoli dla równania Laplace'a $\Delta u = 0$:

$$\|\phi \nabla u\|_2 \leq C \|u \nabla \phi\|_2 \quad \text{dla dowolnej funkcji } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

4. Metody bezpośrednie rachunku wariacyjnego

Tzw. metody bezpośrednie rachunku wariacyjnego służą do znajdowania rozwiązań zagadnień wariacyjnych i opierają się na następującym schemacie:

1. Pokazujemy, że na odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej funkcjonał F jest ograniczony i słabo półciągły z dołu. Termin *odpowiednia przestrzeń funkcyjna* oznacza, że funkcjonał jest dobrze określony, a przestrzeń wyposażona jest w dobre pojęcie zbieżności – chodzi o to, aby mieć własność zwartości, która będzie potrzebna w punkcie 2.
   Mówimy, że funkcjonał F jest (ciągowo) **półciągły z dołu**, jeśli z założenia, że $v_k \to v$ wynika, że $\liminf_{k\to\infty} F(v_k) \geq F(v)$.
2. Z punktu 1 wynika, że istnieje ciąg minimalizujący $\{u_j\}$, tzn. taki, że $F(u_j) \to \inf F$. Pokazujemy, że jest on zbieżny do funkcji u należącej do rozważanej klasy funkcji (tu właśnie potrzebna jest zwartość). Stąd oraz z własności funkcjonału wynika, że $F(u) = \min F$.

Schemat, znany od dawna (proszę pomyśleć, jak dowodzi się, że funkcja ciągła osiąga kresy na odcinku domkniętym), stanowił standardowe podejście do problemów wariacyjnych. W tej formie, tzn. z wykorzystaniem warunku półciągłości, został wprowadzony przez L. Tonellego w roku 1913. Rozważał on funkcjonały spełniające warunek wzrostu

$$f(x, s, \xi) \geq c_1 |\xi|^r - c_2, \quad \text{dla} \quad c_1 > 0, \quad r \geq n = \dim \Omega$$

oraz przestrzeń funkcji absolutnie ciągłych ze zbieżnością jednostajną.

Przełom w metodach bezpośrednich rachunku wariacyjnego stanowiły prace Sobolewa i Morreya z lat 1937–1948. Została w nich wprowadzona wspomniana wcześniej przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ oraz sformułowane twierdzenie Sobolewa o włożeniu:

Twierdzenie. *Jeśli $f \in W^{1,p}(\Omega)$ oraz $1 \leq p < n$, to $f \in L^s(\Omega)$ dla $s = \frac{np}{n-p}$ oraz*

$$\|f\|_{L^s} \leq C(\Omega) \|f\|_{W^{1,p}}.$$

Jeśli $f \in W^{1,p}(\Omega)$ dla $p > n$, to f jest hölderowsko ciągła na Ω.

Schemat poszukiwania rozwiązań zagadnień wariacyjnych wygląda teraz następująco:

1. Z funkcjonałem F łączymy odpowiednią przestrzeń Sobolewa (dla takiej przestrzeni warunek półciągłości z dołu funkcjonału F jest w naturalny sposób spełniony);
2. Korzystając z oszacowań a priori (dla ich uzyskania istotnym elementem jest m.in. twierdzenie Sobolewa o włożeniu) pokazujemy, że istnieje zbieżny ciąg minimalizujący $\{u_j\}$. Otrzymujemy w ten sposób istnienie tzw. słabego rozwiązania.
3. Pozostaje wykazać, że słabe rozwiązanie jest funkcją odpowiednio wiele razy różniczkowalną.

Ta metoda ułatwia dowody istnienia *odpowiednio zdefiniowanych* rozwiązań wielu zagadnień wariacyjnych. Kluczowa trudność została jednak przerzucona na wykazanie, że to, co się uzyskuje, rzeczywiście jest *prawdziwym* rozwiązaniem, funkcją różniczkowalną odpowiednią liczbę razy – czyli na problem regularności rozwiązań.

Metoda zapoczątkowana pracami Morreya i Sobolewa zaowocowała wieloma pięknymi wynikami. Warto wymienić tutaj prace Bersa, Bojarskiego, Nirenberga dotyczące nieliniowych równań drugiego rzędu na funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych, prace Ladyzenskiej i Caccioppoli dotyczące układów równań liniowych drugiego rzędu z gładkimi współczynnikami oraz prace Friedrichsa, Johna, Nirenberga dotyczące układów wyższych rzędów.

5. Problem hölderowskiej ciągłości dla nieliniowych równań na funkcje n zmiennych

W rozdziale 3 mowa była o wczesnych wynikach dotyczących regularności rozwiązań nieliniowych równań eliptycznych ze współczynnikami analitycznymi. Wyniki można streścić mówiąc nieprecyzyjnie, że *każde dostatecznie gładkie rozwiązanie regularnego problemu wariacyjnego jest funkcją analityczną.*
W przypadku słabych rozwiązań (należących do odpowiedniej przestrzeni Sobolewa) pozostaje pokazać, że takie rozwiązanie jest *dostatecznie* gładkie, dokładniej mówiąc, że pochodne takiego rozwiązania są funkcjami hölderowsko ciągłymi.

W pracy Morreya z 1938 roku hölderowska ciągłość rozwiązań została pokazana w przypadku układów równań dwóch zmiennych rzeczywistych. Problem równań nieliniowych na funkcje n zmiennych był otwarty aż do lat '50–tych. Przełom nastąpił za sprawą Ennio De Giorgi. W latach 1957 – 58 udowodnił on, że jeśli v jest słabym rozwiązaniem (klasy $W^{1,2}$) nieliniowego równania eliptycznego drugiego rzędu

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i\big(a_{ij}(x)D_j v\big) = 0, \tag{10}$$

gdzie współczynniki a_{ij} są mierzalne oraz spełniają tzw. **warunek naturalnego wzrostu** (inaczej warunek jednostajnej eliptyczności)

$$m|\xi|^2 \le \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le M|\xi|^2 \quad \text{dla} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega,$$

to u jest funkcją hölderowsko ciągłą (w tym samym czasie analogiczny wynik dla równań parabolicznych udowodnił J. Nash). Opierając się na tym twierdzeniu De Giorgi udowodnił, że każde słabe rozwiązanie minimalizujące jednostajnie eliptyczne analityczne zagadnienie wariacyjne postaci

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)dx$$

jest funkcją analityczną w $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Najważniejszy pomysł jest prosty: jeśli u minimalizuje funkcjonał F, to każda z jego pochodnych cząstkowych $v = u_{x_j}$ spełnia równanie (10). Mimo iż wyjściowe równanie Eulera–Lagrange'a mogło być nieliniowe, (10) jest równaniem liniowym. Dzięki istnieniu (słabych) rozwiązań nieliniowość została umieszczona we współczynnikach a_{ij}.

Metoda De Giorgi stała się ważnym narzędziem w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Duże znaczenie miał także inny dowód twierdzenia De Giorgi, podany przez Mosera w roku 1960, w oparciu o nierówność Harnacka: jeśli u jest dodatnim słabym rozwiązaniem jednostajnie eliptycznego równania, a Ω' jest zwartym podzbiorem Ω, to

$$\max_{\Omega'} u \le C \min_{\Omega'} u.$$

Stąd dostajemy twierdzenie Liouville'a: rozwiązanie określone na $\mathbb{R}^n$, które jest ograniczone, musi być stałe.

6. Układy równań i równania wyższych rzędów

W przypadku, gdy u jest funkcja wektorową, tzn. $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a więc gdy mamy do czynienia z układem równań eliptycznych, sprawa przedstawia się o wiele gorzej. W roku 1968 De Giorgi podał przykład jednostajnie eliptycznego liniowego układu równań typu wariacyjnego, tzn. pochodzącego od funkcjonału postaci

$$F(\vec{u}) = \int_{\Omega} f(x, \nabla\vec{u}(x))dx$$

z ograniczonymi, mierzalnymi współczynnikami o kwadratowym wzroście, który ma nieciągłe (a więc tym bardziej nieanalityczne) rozwiązanie $\frac{x}{|x|^{\gamma}}$, gdzie $\gamma > 1$. Rok później Giusti i Miranda podali analogiczny przykład dla jednostajnie eliptycznego funkcjonału postaci

$$F(\vec{u}) = \int_{\Omega} f(\vec{u}, \nabla\vec{u}(x))dx$$

o współczynnikach analitycznych. Na tym tle szczególnego znaczenia nabrały wyniki Morreya z tego okresu dotyczące regularności rozwiązań dla układów równań na funkcje n zmiennych.

Metoda Morreya opierała się na nowej metodzie zwartościowej De Giorgi i Almgrena, wprowadzonej przez nich przy badaniu powierzchni minimalnych.

Metoda ta w skrócie może być opisana następująco: przypuśćmy, że chcemy udowodnić, że pewne lokalne oszacowanie a priori zachodzi dla wszystkich rozwiązań problemów wariacyjnych z pewnej klasy, która jest niezmiennicza ze względu na liniową zamianę zmiennych. Załóżmy, że tak nie jest. Możemy wtedy znaleźć punkt x_0 i pewnien ciąg równań (układów równań) eliptycznych określonych na ustalonym zbiorze $\Omega \ni x_0$, dla których rozważane oszacowanie nie jest spełnione na coraz mniejszych otoczeniach x_0. Przez liniową zamianę zmiennych możemy przekształcić każde tych otoczeń na pewien ustalony podzbiór $\mathbb{R}^n$ otrzymując ciąg równań określonych na coraz większych obszarach w $\mathbb{R}^n$. Nadal przy tym pozostajemy w rozważanej klasie równań. Stosując odpowiednie twierdzenia o zbieżności rozwiązań – idealnym pierwowzorem tego, co można uzyskać, są tu rozmaite twierdzenia o zbieżności ciągów funkcji harmonicznych – pokazujemy, że ciąg rozpatrywanych rozwiązań jest zbieżny do rozwiązania pewnego równania granicznego, zdefiniowanego na całym $\mathbb{R}^n$. Badane przez nas oszacowanie a priori nie jest spełnione dla rozwiązania tego problemu granicznego. Z drugiej strony jednak przez przejście graniczne otrzymujemy prostsze równanie niż wyjściowe równania nieliniowe – np. liniowe o stałych współczynnikach. Dla takiego równania badane oszacowanie powinno być prawdziwe, co prowadzi do sprzeczności.

Metoda ta wymaga przyjęcia dodatkowych założeń o lokalnym zachowaniu się rozwiązania w punkcie. Z reguły założenia te spełnione są w prawie każdym (z dokładnością do zbioru miary 0) punkcie przestrzeni – i w rezultacie oszacowania są prawdziwe też jedynie w prawie każdym punkcie przestrzeni. Otrzymujemy zatem regularność rozwiązań *prawie wszędzie.*

Posługując się tą metodą, w roku 1968 Morrey udowodnił, że rozwiązania zagadnienia minimalizacji funkcjonału wariacyjnego niejednostajnie eliptycznego typu

$$F(\vec{u}) = \int f(x, \nabla\vec{u})dx$$

o współczynnikach analitycznych są analityczne prawie wszędzie. Analogiczny rezultat uzyskał też dla zagadnienia minimalizacji funkcjonałów wariacyjnych jednostajnie eliptycznych typu

$$F(\vec{u}) = \int f(x, \vec{u}, \nabla\vec{u})dx$$

o współczynnikach analitycznych.

Przy tej okazji powstał problem opisu zbioru singularnego, tzn. zbioru, na którym rozwiązanie przestaje być ciągłe (gładkie). W latach 1970–72 Giusti i Miranda uprościli rozumowanie Morreya i znaleźli oszacowanie na miarę Hausdorffa zbioru punktów nieanalityczności. Można również zadawać pytania o strukturę zbioru singularnego – czy jest on np. semianalityczny? – oraz o założenia, które implikują regularność w każdym punkcie. Warto w tym miejscu wspomnieć o pracy K. Uhlenbeck, która w roku 1977 udowodniła lokalną hölderowską ciągłość pochodnych funkcji minimalizujących funkcjonały tego typu, co

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \text{dla} \quad p \geq 2.$$

W latach późniejszych (1979 – 84) rezultaty dotyczące hölderowskiej ciągłości otrzymywali Giaquinta, Modica, Giusti stosując inne ważne narzędzie – lemat Gehringa. Dotyczy on własności samo-poprawiania dla tzw. odwrotnych nierówności Höldera. Jeśli nieujemna funkcja f, całkowalna z p–tą potęgą, spełnia w każdej kostce Q nierówność

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} f^p(x)dx \leq c_1\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} f(x)dx\right)^p$$

to wówczas jest całkowalna z pewną potęgą $q > p$ i zachodzi nierówność

$$\int f^q(x)dx \leq c_2\left(\int f^p(x)dx.\right)^{q/p}.$$

To ważne narzędzie zostało udowodnione przez Gehringa w pracy z 1973 roku dotyczącej odwzorowań quasi-konforemnych. Znalazło ono później szerokie zastosowanie w teorii nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych.

W ostatnim ćwierćwieczu, za sprawą motywacji fizycznych (model Eriksena ciekłych kryształów, nieliniowa teoria sprężystości) szczególnie intensywnie badano zagadnienia wariacyjne, w których obecne są dodatkowe więzy. Mimo intensywnego flirtu z wieloma działami analizy wciąż jeszcze bardzo nam daleko do jakiejkolwiek sensownej i *pełnej* odpowiedzi na pytanie, jak to jest z XIX i XX problemem Hilberta dla *układów* równań eliptycznych. Nawet przypadek, gdy niewiadome funkcje zależą tylko od dwóch zmiennych rzeczywistych, nie jest jeszcze do końca rozpatrzony.

7. Dalszy rozwój

Omówiony tu został pokrótce rozwój metod wariacyjnych i ich zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Wspomnijmy na koniec, że współczesne badania poszły mnóstwem ścieżek zapoczątkowanych wcześniejszymi wynikami. Można na przykład zadać pytanie o warunek naturalnego wzrostu – nie występował on w problemie sformułowanym przez Hilberta, czy zatem jest to warunek konieczny? Osłabianie założeń odnośnie naturalnego wzrostu funkcjonału, czy też współczynników równania, prowadzi do wielu ciekawych zagadnień. Rozpatruje się równania o wzroście wielomianowym z zaburzeniami, o wzroście wykładniczym, z oscylacjami, a także o wzroście wielomianowym z wagą (to prowadzi do tzw. wagowych przestrzeni Sobolewa i łączy się ściśle z geometryczną teoria miary). W odniesieniu do układów równań możemy na różny sposób formułować też warunek wypukłości funkcjonału (quasi-wypukłość, wypukłość rzędu jeden, poli-wypukłość); można też rezygnować z warunku wypukłości i rozważać problemy wariacyjne nieregularne. Dla niektórych problemów korzystne jest także poszukiwanie rozwiązań w przestrzeniach innych niż przestrzenie Sobolewa – zgodnie z tym, co postulował Hilbert, pojęcie rozwiązania należy sformułować w sposób *odpowiedni* dla danego problemu. Rozważa się wiec przestrzenie Orlicza–Sobolewa, tzw. rozwiązania lepkościowe oraz inne typy rozwiązań.

Literatura

[1] E. Bombieri, *Variational problems and elliptic equations*, Proc. Symposia Pure Math., Vol. XXVIII, ed. F. E. Browder, Amer. Math. Soc., 1976, 525–535.

[2] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Gesammelte Abhandlungen vol. 3, Berlin 1935, 290–329.

[3] P. Marcellini, *Some recent developments in the study of Hilbert's 19th and 20th problems*, (Italian) Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 11 (1997), no. 2, 323–352.