Wobec (113) mamy:

$$\left| f_{n_{k_p}}(x) - P_{f_{n_{k_p}}}(x) \right| < \varepsilon + M, \text{ dla } p > \nu, \ a \leq x \leq b,$$

skąd, w granicy, dla $p = \infty$:

$$| f(x) - Q(x) | \leq \varepsilon + M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε, dowodzi, że

$$| f(x) - Q(x) | \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b$$

i przeto

$$Q(x) = P_f(x), \text{ dla } a \leq x \leq b$$

[gdyż istnieje tylko jeden wielomian stopnia $\leq m$, dający najlepsze przybliżenie dla $f(x)$ w przedziale (a, b)].

Ciąg wielomianów $P_{f_{n_{k_p}}}(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, będąc w przedziale (a, b) zbieżnym jednostajnie do $Q(x)$, jest więc zbieżnym jednostajnie do $P_f(x)$, wbrew temu, że przy żadnem naturalnem k nie zachodzi nierówność (110).

Dowiedliśmy więc, że ciąg wielomianów $P_{f_n}(x)$ musi zmierzać w przedziale (a, b) jednostajnie do $P_f(x)$.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 157.

ROZDZIAŁ XV.

Szeregi potęgowe.

§ 124. **Szeregiem potęgowym** nazywamy szereg nieskończony

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \tag{1}$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ są dane współczynniki rzeczywiste lub zespolone, zaś z oznacza zmienną zespoloną.

Twierdzenie 158. *Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny dla $z = z_0$ $(\neq 0)$, to jest on zbieżny bezwzględnie dla każdego z, którego moduł jest mniejszy od modułu liczby z_0.*

Dowód. Załóżmy, że szereg potęgowy (1) jest zbieżny dla danej liczby zespolonej $z_0 \neq 0$, czyli że szereg

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \ldots$$

jest zbieżny: z założenia tego wynika, że $\lim\limits_{n=\infty} a_n z_0^n = 0$; dla dostatecznie wielkich n jest więc

$$|a_n z_0^n| < 1,$$

skąd, mnożąc obie strony przez liczbę $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, dostajemy:

$$|a_n z^n| < \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Składniki szeregu

$$|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + |a_3 z^3| + \ldots$$

są więc, poczynając od pewnego miejsca, odpowiednio mniejsze od składników szeregu geometrycznego

$$1 + \left|\frac{z}{z_0}\right| + \left|\frac{z}{z_0}\right|^2 + \left|\frac{z}{z_0}\right|^3 + \ldots,$$

który jest zbieżny dla $|z| < |z_0|$. Wnosimy stąd, w jednej chwili, że szereg (1) jest zbieżny bezwzględnie dla $|z| < |z_0|$, *c. b. d. o.*

Wniosek. *Jeżeli szereg potęgowy jest rozbieżny dla $z = z_0$, to jest on tembardziej rozbieżny przy wszelkiem z, którego moduł jest większy od modułu liczby z_0.*

W samej rzeczy, gdyby szereg (1) był zbieżny dla pewnej liczby z_1, dla której $|z_1| > |z_0|$, to, w myśl tw. 158, musiałby on być zbieżnym dla $z = z_0$, wbrew założeniu.

Zbadamy bliżej różne przypadki, jakie zachodzić mogą co do zbieżności szeregu potęgowego. Przedewszystkiem zwrócimy uwagę na dwa przypadki krańcowe:

1) Szereg potęgowy może być zbieżny przy wszelkiem zespolonem z (szereg taki nazywamy *bezustannie zbieżnym*, zaś sumę jego nazywamy *funkcją całkowitą*, ze względu na pewne analogje z wielomianami całkowitymi): takim jest np. szereg

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

W samej rzeczy, kładąc $\left|\frac{z^n}{n!}\right| = u_n$, mamy tu $u_n = 0$, dla $z = 0$, zaś dla $z \neq 0$ mamy $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1}$, skąd, przy wszelkiem danem $z \neq 0$ znajdujemy: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ i cecha d'Alemberta dowodzi bezustannej zbieżności naszego szeregu.

2) Szereg potęgowy może być zbieżny tylko dla $z=0$: takim jest np. szereg

$$1!z+2!z^2+2!z^2+\dots$$

W samej rzeczy, kładąc $n!z^n=u_n$, mamy dla $z\neq 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=(n+1)|z|$, skąd, przy wszelkiem $z\neq 0$ znajdujemy $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ i cecha d'Alemberta dowodzi rozbieżności naszego szeregu dla $z\neq 0$.

Załóżmy teraz, że dla danego szeregu potęgowego (1) nie zachodzi żaden z omówionych przypadków krańcowych. Istnieją więc conajmniej jedna liczba zespolona $z_1\neq 0$, dla której szereg (1) jest zbieżny, oraz conajmniej jedna liczba zespolona z_2, dla której szereg (2) jest rozbieżny. Podzielmy zbiór wszystkich liczb dodatnich na dwie klasy, zaliczając do pierwszej klasy każdą liczbę dodatnią, dla której szereg (1) jest zbieżny, zaś do drugiej klasy — każdą liczbę dodatnią, dla której szereg (1) jest rozbieżny. Żadna z tych klas nie jest próżną, gdyż z tw. 158 wynika, że szereg (1) jest zbieżny dla każdej liczby dodatniej $<|z_1|$ oraz rozbieżny dla każdej liczby dodatniej $>|z_2|$. Powiadam dalej, że każda liczba klasy pierwszej jest mniejsza od każdej liczby klasy drugiej. W samej rzeczy, gdyby jakaś liczba ϱ_1 klasy pierwszej była większa od jakiejś liczby ϱ_2 klasy drugiej (równość jest oczywiście wykluczona, gdyż żadna liczba nie może należeć w naszym podziale jednocześnie do obu klas), to szereg potęgowy (1) byłby zbieżny dla liczby ϱ_1 i rozbieżny dla liczby ϱ_2, przyczem $|\varrho_1|>|\varrho_2|$, wbrew twierdzeniu 158. Podział nasz tworzy więc *przekrój* (właściwy) zbioru liczb dodatnich i przeto wyznacza pewną liczbę dodatnią R, która jest jednocześnie niemniejszą od każdej liczby klasy pierwszej i niewiększą od każdej liczby klasy drugiej.

Powiadam, że szereg (1) będzie zbieżny i to bezwzględnie, dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest $<R$, oraz rozbieżny, dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest $>R$. W samej rzeczy załóżmy, że $|z|<R$; obierzmy liczbę dodatnią ϱ, pośrednią między $|z|$ i R: wobec $\varrho<R$ liczba ϱ będzie należała do klasy pierwszej i przeto szereg (1) będzie zbieżny dla liczby ϱ: wobec $|z|<\varrho$ oraz w myśl tw. 158, będzie on więc zbieżny bezwzględnie dla liczby z. Z drugiej strony załóżmy, że $|z|>R$; obierając liczbę dodatnią ϱ pośrednią między R i $|z|$, wnosimy, wobec $\varrho>R$, że ϱ należy do klasy drugiej i przeto szereg (1) będzie rozbieżny dla liczby ϱ i, wobec $|z|>\varrho$ oraz w myśl wniosku z tw. 158, będzie tembardziej rozbieżny dla liczby z.

Dowiedliśmy więc, że w uważanym przypadku istnieje liczba dodatnia R taka, iż szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie dla $|z|<R$ oraz rozbieżny dla $|z|>R$.

Łatwo widzieć, że taka liczba R jest tylko jedna. W samej rzeczy, gdyby jeszcze liczba dodatnia R_1 posiadała tę własność, że szereg (1) jest zbieżny dla $|z|<R_1$ i rozbieżny dla $|z|>R_1$ i gdyby było $R<R_1$, to, kładąc $\varrho=\frac{R+R_1}{2}$, mielibyśmy $R<|\varrho|<R_1$ i, wobec $R<|\varrho|$ szereg (1) byłby rozbieżny dla liczby ϱ, a jednocześnie, wobec $|\varrho|<R_1$ szereg ten musiałby być zbieżny dla liczby ϱ, co niemożliwe. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 159. *Jeżeli szereg potęgowy nie jest bezustannie zbieżny, ani też zbieżny tylko w punkcie 0, to istnieje dla uważanego szeregu jedna i tylko jedna liczba dodatnia R taka, iż szereg ten jest zbieżny (i to bezwzględnie) dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest mniejszy od R oraz rozbieżny dla każdej liczby zespolonej, której moduł jest większy od R.*

Liczbę tę nazywamy *promieniem zbieżności* uważanego szeregu potęgowego.

Wniosek. *Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny warunkowo dla liczby zespolonej z_0, to liczba $R=|z_0|$ jest promieniem zbieżności uważanego szeregu.*

W samej rzeczy, z jednej strony, w myśl tw. 158, uważany szereg jest zbieżny dla $|z|<R$, z drugiej zaś strony nie może być zbieżny dla $|z|>R$, gdyż wówczas musiałby być zbieżny bezwzględnie dla z_0 (wobec $|z_0|=R<|z|$), wbrew założeniu.

O punktach z, spełniających nierówność $|z|<R$, mówimy, że leżą *wewnątrz* koła zbieżności danego szeregu potęgowego; o punktach z, spełniających nierówność $|z|>R$, mówimy, że leżą *zewnątrz* koła zbieżności, wreszcie o punktach z, spełniających równość $|z|=R$, mówimy, że leżą *na obwodzie* koła zbieżności uważanego szeregu potęgowego, lub poprostu *na* jego *kole zbieżności*.

Jeżeli szereg potęgowy jest bezustannie zbieżny, to mówimy, że jego promień zbieżności jest nieskończenie wielki ($R=\infty$); jeżeli szereg potępowy jest zbieżny jedynie w punkcie 0, to mówimy, że jego promień zbieżności jest $=0$. W ten sposób każdy szereg potęgowy ma oznaczony promień zbieżności R, który jest liczbą rzeczywistą nieujemną, skończoną lub nieskończoną, przytem taką, że dla $|z|<R$ szereg jest zawsze zbieżny, zaś dla $|z|>R$ — zawsze rozbieżny.

Twierdzenie 160 (Cauchy'ego-Hadamard'a). *Jeżeli przez R oznaczymy promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, zaś przez λ liczbę $\lambda = \overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, to będzie*

$$R=\frac{1}{\lambda} \text{ dla } 0<\lambda<\infty,$$
$$R=\infty \text{ dla } \lambda=0,$$
$$\textit{wreszcie } R=0 \text{ dla } \lambda=\infty.$$

Dowód. Załóżmy, że $0<\lambda<\infty$. Dla dowodu, że $R=\frac{1}{\lambda}$ wystarczy okazać, że szereg potęgowy $\Sigma a_n z^n$ jest zbieżny dla $|z|<\frac{1}{\lambda}$ oraz rozbieżny dla $|z|>\frac{1}{\lambda}$. Niech więc z oznacza daną liczbę zespoloną $\neq 0$, spełniającą nierówność $|z|<\frac{1}{\lambda}$: będzie zatem $\lambda|z|<1$. Oznaczmy przez a liczbę dodatnią, pośrednią między $\lambda|z|$ oraz 1: będzie więc $\lambda|z|<a<1$, skąd $\lambda<\frac{a}{|z|}$. Wobec $\lambda=\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ będzie więc $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{a}{|z|}$ dla $n>\mu$, co daje w jednej chwili $|a_n z^n|<a^n$ dla $n>\mu$, co, wobec $a<1$, dowodzi zbieżności (bezwzględnej) szeregu $\Sigma a_n z^n$. Szereg ten jest więc zbieżny dla $|z|<\frac{1}{\lambda}$. Z drugiej strony, jeżeli z oznacza liczbę zespoloną, spełniającą nierówność $|z|>\frac{1}{\lambda}$, to mamy $\lambda>\frac{1}{|z|}$, skąd, wobec $\lambda=\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ wynika, że dla nieskończenie wielu różnych n mamy $\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{|z|}$, czyli $|a_n z^n|>1$, co dowodzi rozbieżności szeregu $\Sigma a_n z^n$: szereg nasz jest więc rozbieżny dla $|z|>\frac{1}{\lambda}$.

Załóżmy teraz, że $\lambda=0$, czyli że $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$: będzie więc, przy wszelkiem $z\neq 0$ i wszelkiem dodatniem $a<1$, $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{a}{|z|}$, skąd, dla $n>\mu$: $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{a}{|z|}$, czyli $|a_n z^n|<a^n$, co dowodzi zbieżności szeregu $\Sigma a_n z^n$ przy wszelkiem zespolonem z. Szereg nasz jest więc bezustannie zbieżny, czyli $R=\infty$.

Załóżmy wreszcie, że $\lambda=\infty$, czyli że $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$.

Wynika stąd, że przy każdem danem zespolonem $z\neq 0$, dla nieskończenie wielu różnych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant\frac{1}{|z|}$, czyli $|a_n z^n|\geq 1$, co dowodzi rozbieżności szeregu $\Sigma a_n z^n$ przy wszelkiem $z\neq 0$. Jest więc w uważanym przypadku $R=0$.

Twierdzenie nasze udowodniliśmy zatem w zupełności.

Uwaga. Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, to wartość tej granicy jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\Sigma a_n z^n$: mamy bowiem wówczas, w myśl tw. 95:

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

§ **125. Twierdzenie 161.** *Jeżeli R oznacza promień zbieżności danego szeregu potęgowego, zaś ρ — dowolną daną liczbę dodatnią $<R$, to szereg ten jest zbieżny jednostajnie i przeto przedstawia funkcję ciągłą w zbiorze Z wszystkich liczb zespolonych z, spełniających nierówność $|z|\leq\rho$.*

Dowód. Niech $R(>0)$ oznacza (skończony lub nieskończenie wielki) promień zbieżności szeregu potęgowego $\Sigma a_n z^n$, ρ — liczbę dodatnią. Uważany szereg jest więc zbieżny przy wszelkiem zespolonem z, którego moduł jest mniejszy od R: połóżmy

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+\dots$$

— będzie to więc funkcja zmiennej zespolonej z, oznaczona w zupełności dla $|z|<R$. Oznaczając przez $r_n(z)$ resztę szeregu $f(z)$, będziemy mieli:

$$r_n(z)=a_n z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\dots;$$

lecz, dla $|z| \leq \rho$ mamy

$$|a_k z^k| \leq |a_k \rho^k|, \quad (k = 1, 2, 3 \ldots),$$

skąd w jednej chwili (z uwagi, że wobec $\rho < R$ szereg $f(\rho)$ jest zbieżny bezwzględnie):

$$|r_n(z)| \leq |a_n| \rho^n + |a_{n+1}| \rho^{n+1} + \ldots, \text{ dla } |z| \leq \rho. \tag{2}$$

Z drugiej strony, wobec zbieżności bezwzględnej szeregu $f(\rho)$, dla liczby dodatniej ε istnieje liczba μ taka, iż

$$|a_n| \rho^n + |a_{n+1}| \rho^{n+1} + \ldots < \varepsilon \text{ dla } n > \mu.$$

W myśl (2) mamy więc

$$|r_n(z)| < \varepsilon \text{ dla } n > \mu$$

przy wszelkiem zespolonem z, spełniającem nierówność $|z| \leq \rho$, co dowodzi zbieżności jednostajnej uważanego szeregu potęgowego dla $|z| \leq \rho$. Ponieważ zaś składniki szeregu potęgowego są funkcjami ciągłemi zmiennej z, więc suma tego szeregu (jako jednostajnie zbieżnego dla $|z| \leq \rho$) przedstawia (w myśl tw. 147) funkcję ciągłą dla $|z| \leq \rho$. Twierdzenie 161 udowodniliśmy zatem w zupełności.

W szczególności, jeżeli $R = \infty$, to jako ρ możemy w tw. 161 obrać dowolną liczbę dodatnią: funkcja $f(z)$ będzie więc ciągłą (w zbiorze liczb zespolonych) dla każdej wartości zmiennej zespolonej z, czyli, jak się wyrażamy: *w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej.*

Szereg potęgowy bezustannie zbieżny przedstawia więc funkcję ciągłą w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Podobnież, w razie kiedy R jest liczbą skończoną, możemy jako ρ obrać dowolną liczbę dodatnią $< R$: jeżeli więc z_0 oznacza liczbę zespoloną taką iż $|z_0| < R$, to, obierając jako ρ liczbę pośrednią między z_0 oraz R, wywnioskujemy, w myśl tw. 161, że $f(z)$ jest funkcją ciągłą dla punktu z_0 (w zbiorze liczb zespolonych). *Szereg potęgowy przedstawia więc funkcję ciągłą w całem wnętrzu swego koła zbieżności.*

§ **126.** Co się tyczy zachowania się szeregu potęgowego *na obwodzie swego koła zbieżności,* to może ono być rozmaite:

1) Szereg potęgowy może być rozbieżny na całem swem kole zbieżności: takim jest np. szereg geometryczny

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$$

którego promień zbieżności jest oczywiście $= 1$.

2) Szereg potęgowy może być zbieżny na całem swem kole zbieżności: takim jest np. szereg

$$\frac{z}{1^2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z}{3^3} + \ldots,$$

którego promień zbieżności jest $= 1$ (gdyż dla $|z| = 1$ szereg nasz jest zbieżny (bezwzględnie), wobec zbieżności szeregu $\Sigma \frac{1}{n^2}$, zaś dla $|z| > 1$ szereg nasz jest rozbieżny, ponieważ $\lim \frac{a^n}{n^2} = \infty$ dla $a > 1$).

3) Szereg potęgowy może być w pewnych punktach swego koła zbieżności zbieżnym, w innych zaś rozbieżnym: takim jest np. szereg

$$\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

(o promieniu zbieżności 1), który, jak łatwo widzieć, jest zbieżny dla $z = 1$ i rozbieżny dla $z = -1$. Możnaby okazać, że punkt $z = -1$ jest tu jedynym punktem koła $|z| = 1$, w którym szereg nasz jest rozbieżny.

Szereg potęgowy może być zbieżnym dla nieskończenie wielu punktów swego koła zbieżności i jednocześnie rozbieżnym dla nieskończenie wielu punktów tegoż koła. Takim jest np. szereg Ruziewicza $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n3^n}}{n}$.

W samej rzeczy, niech m oznacza dowolną daną liczbę naturalną. Dla każdego pierwiastka z równania $z^{3^m} = 1$ (a takich pierwiastków mamy, w myśl tw. 75, dokładnie 3^m) będziemy mieli oczywiście $z^{n3^n} = 1$ dla $n \geq m$ i przeto (wobec rozbieżności szeregu harmonicznego) szereg Ruziewicza będzie rozbieżny. Natomiast dla każdego pierwiastka z równania $z^{3^m} = -1$ (których jest również 3^m) będziemy mieli, jak łatwo widzieć $z^{n3^n} = (-1)^n$ dla $n \geq m$ i przeto, wobec zbieżności szeregu $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, szereg Ruziewicza będzie zbieżny. Wobec dowolności liczby naturalnej m wnosimy więc, że szereg Ruziewicza jest zbieżny dla nieskończenie wielu różnych z, dla których $|z|=1$, a jednocześnie rozbieżny dla nieskończenie wielu takich z.

Istnieją też szeregi potęgowe zbieżne w jednym tylko punkcie swego koła zbieżności [1]). Nie dla każdego jednak dowolnie danego na kole $|z|=1$ zbioru liczb zespolonych Z istnieje szereg potęgowy, który dla $|z|=1$ jest zbieżny w całym zbiorze Z i rozbieżny poza tym zbiorem.

Jak dowiedliśmy w końcu § 125, szereg potęgowy przedstawia funkcję ciągłą w całem wnętrzu swego koła zbieżności. Godnem uwagi jest jednak, że na obwodzie koła zbieżności suma szeregu potęgowego może być funkcją nieciągłą. Damy mianowicie ***przykład szeregu potęgowego, który, będąc zbieżnym w każdym punkcie swego koła zbieżności, przedstawia na tem kole funkcję nieciągłą*** [2]).

Połóżmy w tym celu

$$\alpha_n = \frac{n^2-1+2ni}{n^2+1} \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{3}$$

i oznaczmy przez $P(z)$ szereg potęgowy, który otrzymamy, odrzucając nawiasy w szeregu

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1^2}{2} z^2(\alpha_1+z)+\frac{2^2}{2^2} z^{2^2}(\alpha_2^3+\alpha_2^2 z+\alpha_2 z^2+z^3)+\ldots \\ &\ldots+\frac{n^2}{2^n} z^{2^n}(\alpha_n{}^{2^n-1}+\alpha_n{}^{2^n-2} z+\ldots+\alpha_n z^{2^n-2}+z^{2^n-1})+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

czyli szereg

$$\left.\begin{aligned} P(z)&=\frac{\alpha_1}{2} z^2+\frac{1}{2} z^3+\alpha_2^3 z^4+\alpha_2^2 z^5+\alpha_2 z^5+z^7+\frac{9}{8}\alpha_3^7 z^8+\ldots \\ &\ldots+\frac{n^2}{2^n}\alpha_n{}^{2^n-1} z^{2^n}+\frac{n^2}{2^n}\alpha_n{}^{2^n-2} z^{2^n+1}+\ldots+\frac{n^3}{2^n} z^{2^{n+1}-1}+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Udowodnimy, że szereg (4) jest zbieżny dla $|z|=1$.

Ze wzorów (3) wynika natychmiast, że

$$|\alpha_n|=1, \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{6}$$

oraz

$$|1-\alpha_n|=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{7}$$

Niech teraz z oznacza liczbę zespoloną, spełniającą warunek

$$|z|=1. \tag{8}$$

[1]) Zob. mój odnośny komunikat w Sprawozd. z pos. Tow. Nauk. Warsz. 1912, p. 153, albo też cytowaną na str. 314 książkę Landau'a, § 16.

[2]) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* T. 41 (1916), p. 187. Zauważymy, że jeszcze w r. 1912 p. H. Steinhaus znalazł szereg potęgowy, który, będąc zbieżnym na całem swem kole zbieżności, przedstawia na tem kole funkcję pantachicznie nieciągłą (t. j. funkcję, która nie jest ciągłą na żadnym łuku uważanego koła). Zob. *Sprawozdania z pos. Tow. Nauk. Warsz.* t. VI (1913), str. 357—367.

Dla $z \neq \alpha_n$ możemy n-ty składnik $u_n(z)$ szeregu (4) napisać w postaci:

$$u_n(z)=\frac{n^2}{2^n} z^{2^n}\cdot\frac{z^{2^n}-\alpha_n^{2^n}}{z-\alpha_n},$$

skąd, wobec (8) i (6):

$$|u_n(z)| \leq \frac{2n^2}{2^n|z-\alpha_n|}, \quad \text{dla } z \neq \alpha_n, \quad |z|=1. \tag{9}$$

Rozróżnimy dalej dwa przypadki:

1) $z \neq 1$. Połóżmy

$$|1-z|=2\delta: \tag{10}$$

będziemy więc mieli $\delta>0$. Dla $n>\frac{2}{\delta}$ będzie $\sqrt{n^2+1}>n>\frac{2}{\delta}$ i przeto, wobec (7):

$$|1-\alpha_n|<\delta,$$

co daje, wobec (10):

$$|\alpha_n-z|=|(1-z)-(1-\alpha_n)| \geq |1-z|-|1-\alpha_n|>\delta,$$

zatem

$$|z-\alpha_n|>\delta, \quad \text{dla } n>\frac{2}{\delta}, \tag{11}$$

skąd, wobec (9):

$$|u_n(z)|<\frac{2n^2}{2^n\delta} \quad \text{dla } n>\frac{2}{\delta},$$

co, wobec zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$, dowodzi zbieżności szeregu (4) dla $|z|=1$, $z \neq 1$.

2) $z=1$. Wobec (7) i (9) znajdujemy:

$$|u_n(1)| \leq \frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{2^n}, \quad \text{dla } n=1,2,3,\ldots,$$

co, jak łatwo widzieć, pociąga za sobą zbieżność szeregu (4) dla $z=1$.

Szereg (4) jest więc zawsze zbieżny dla $|z|=1$.

Powiadam dalej, że i szereg (5) jest zbieżny dla $|z|=1$.

Oznaczmy, dla dowodu, przez $P_k(z)$ sumę $k-1$ pierwszych składników szeregu (5). Niech k oznacza dany wskaźnik >1: przy pewnem naturalnem n (zależnem od k) będziemy mieli:

$$2^n \leq k < 2^{n+1} \tag{12}$$

i przeto, oznaczając przez $S_n(z)$ sumę n pierwszych składników szeregu (4), będziemy mogli napisać:

$$P_k(z)=S_{n-1}(z)+\frac{n^2 z^{2^n}}{2^n}(\alpha_n{}^{2^n-1}+\alpha_n{}^{2^n-2} z+\ldots+\alpha_n{}^{2^{n+1}-k-1} z^{k-2^n}),$$

skąd:

$$P_k(z)-S_{n-1}(z)=\frac{n^2 \cdot z^{2^n}\alpha_n{}^{2^{n+1}-k-1}}{2^n}\cdot\frac{z^{k-2^n+1}-\alpha_n{}^{k-2^n+1}}{z-\alpha_n}\cdot \text{ dla } z \neq \alpha_n,$$

zatem, wobec (6) i (8):

$$|P_k(z) - S_{n-1}(z)| \leq \frac{2n^2}{2^n |z-\alpha_n|}, \text{ dla } z \neq \alpha_n \,.\, |z| = 1 \tag{13}$$

Niech będzie $z \neq 1$. Oznaczając przez δ liczbę $\frac{1}{2}|1-z|$, będziemy dla $k > 2^{\frac{2}{\delta}+1}$ mieli, wobec (12): $2^{n+1} > 2^{\frac{2}{\delta}+1}$, zatem $n > \frac{2}{\delta}$, co, wobec (11), pociąga za sobą nierówność

$$|z - \alpha_n| > \delta;$$

wzór (13) daje więc:

$$P_k(z) - S_{n-1}(z)| < \frac{2n^2}{2^n\delta}, \text{ dla } k > 2^{\frac{2}{\delta}+1} \tag{14}$$

Lecz, wobec (12), n wzrasta nieograniczenie wraz z k: nierówność (14) dowodzi więc, wobec zbieżności szeregu (4) [a więc i ciągu $S_{n-1}(z)$], że ciąg $P_k(z)$ $(k=1,2,\ldots)$ jest zbieżny.

Dla $z=1$ nierówność (13) daje, wobec (7):

$$|P_k(1) - S_{n-1}(1)| \leq \frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{2^n},$$

skąd, wobec zbieżności szeregu (4), znowu wnosimy o zbieżności ciągu $P_n(1)$ $(k=1,2,3,\ldots)$.

Udowodniliśmy więc, że ciąg $P_k(z)$ $(k=1,2,3,\ldots)$, a więc też i szereg (5), jest zawsze zbieżny dla $|z|=1$.

Powiadam, że funkcja $P(z)$ nie jest ograniczoną dla $|z|=1$.

W samej rzeczy niech k oznacza dowolną daną liczbę naturalną: obliczymy $P(\alpha_k)$. Wystarczy w tym celu oczywiście obliczyć sumę szeregu (4) dla $z=\alpha_k$.

Wobec (3) znajdujemy w jednej chwili dla naturalnych k i n:

$$|\alpha_k - \alpha_n| = \frac{2|k-n|}{\sqrt{(k^2+1)(n^2+1)}},$$

skąd

$$|\alpha_k - \alpha_n| \geq \frac{2}{\sqrt{(k^2+1)(n^2+1)}}, \text{ dla } n \neq k,$$

zatem, wobec (9) (z uwagi, że, wobec (6), $|\alpha_k|=1$):

$$|u_n(\alpha_k)| \leq \frac{n^2}{2_n}\sqrt{(k^2+1)(n^2+1}, \text{ dla } n \neq k,$$

co daje:

$$\left|\sum_{n=1}^{k-1} u_n(\alpha_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n(\alpha_k)\right| < \sqrt{k^2+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{2^n}. \tag{15}$$

Połóżmy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{2^n} = A$$

(będzie to oczywiście liczba dodatnia, skończona) wobec (15) będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$|P(\alpha_k) - u_k(\alpha_k)| < A\sqrt{k^2+1} < A(k+1). \tag{16}$$

Z drugiej strony, mamy oczywiście

$$u_k(\alpha_k) = k^2\alpha_k^{2^{k+1}} - 1,$$

zatem, wobec (6):

$$|u_k(\alpha_k)| = k^2 \tag{17}$$

Wobec (16) i (17) dają:

$$|P(\alpha_k)| = |u_k(\alpha_k) - [u_k(\alpha_k) - P(\alpha_k)]| \geq |u_k(\alpha_k)| - |u_k(\alpha_k) - P(\alpha_k)| > k^2 - A(k+1),$$

czyli:

$$|P(\alpha_k)| > k^2 - A(k+1). \tag{18}$$

Wobec (18) znajdujemy natychmiast (z uwagi, że A nie zależy od n):

$$\lim_{k=\infty} |P(\alpha_k)| = \infty,$$

natomiast, w myśl (6) i (7) mamy:

$$|\alpha_k| = 1 \ (k=1,2,\ldots), \quad \text{oraz} \quad \lim_{k=\infty}\alpha_k = 1.$$

Wynika stąd natychmiast, że funkcja $P(z)$ jest na kole $|z|=1$ nieciągłą dla punktu $z=1$ (oraz, że nie jest ograniczoną na kole $|z|=1$). Koło $|z|=1$ jest tu oczywiście kołem zbieżności szeregu (5), gdyż inaczej, w myśl tw. 161, szereg ten przedstawiałby funkcję ciągłą na uważanem kole, wbrew temu czegośmy przed chwilą dowiedli.

Dowiedliśmy więc, że *szereg potęgowy, który jest zbieżny na całem swem kole zbieżności, może na tem kole przedstawiać funkcję nieciągłą.*

Ze wzoru (17) wynika natychmiast, że szereg (4), a więc, tembardziej szereg (5), jest zbieżny niejednostajnie na kole $|z|=1$. Mamy więc przykład szeregu potęgowego, zbieżnego na całem swem kole zbieżności, ale niejednostajnie. (Możnaby też stąd z łatwością wywnioskować, że szereg (5) jest zbieżny niejednostajnie dla $|z|<1$).

Zauważymy też, że istnieje szereg potęgowy, zbieżny na całem swem kole zbieżności, ale *niejednostajnie,* którego suma atoli jest na tem kole funkcją *ciągłą* [1])

Powiadam wreszcie, że szereg (5) jest dla $|z|=1$ zbieżny tylko warunkowo. W samej rzeczy, biorąc moduły składników szeregu (5) i łącząc je w grupy, odpowiadające składnikom szeregu (4), otrzymamy, jak łatwo widzieć, jako sumę modułów n tej grupy liczbę n^2, skąd wynika, że dla $|z|=1$ szereg modułów kolejnych składników szeregu (5) jest zawsze rozbieżny. Widzimy więc, że *szereg potęgowy może być zbieżny na całem swem kole zbieżności, ale tylko warunkowo.*

---

[1]) Przykład takiego szeregu podał w r. 1917 L. Fejér w pracy, ogłoszonej w Sprawozdaniach Akademji Bawarskiej z tegoż roku, str. 38.

(Łatwo widzieć, że szereg potęgowy, który jest zbieżny bezwzględnie w pewnym punkcie swego koła zbieżności, jest na całem tem kole zbieżny jednostajnie i przedstawia na niem funkcję ciągłą).

§ 126ᵃ. Co do charakteru zbieżności szeregu potęgowego na obwodzie swego koła zbieżności, to okażemy jeszcze, że ***istnieją szeregi potęgowe, które są dla*** $|z|=1$ ***zbieżne jednostajnie, ale nie bezwzględnie.***

W r. 1913 udowodnił Hardy, że szeregiem takim jest szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} \binom{-i}{n} z^n;$$

dowód Hardy'ego jest jednak nieelementarny [1]). Wcześniej nieco znalazł podobny szereg p. H. Steinhaus, ale ogłosił go dopiero w r. 1918 [2]). P. Steinhaus udowodnił mianowicie, że szereg

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{E\frac{\log n}{\log 2}}}{n \log n} z^n,$$

podany jeszcze w r. 1885 przez Pringsheima, jako przykład szeregu zbieżnego warunkowo na całem swem kole zbieżności [3]), jest na całem tem kole zbieżny jednostajnie.

Bardziej jeszcze elementarny przykład szeregu o żądanej własności otrzymać można w sposób następujący [4]).

Weźmy pod uwagę szereg

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} \left(z^{2^{n-1}} + z^{2^{n-1}+1} + \ldots + z^{2^n-1}\right), \tag{a}$$

czyli szereg

$$\frac{z}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2}(z^2+z^3) + \frac{1}{2^3 \cdot 3}(z^4+z^5+z^6+z^7) - \frac{1}{2^4 \cdot 4}(z^8+\ldots+z^{15}) + \ldots$$

Opuszczając nawiasy, otrzymamy z szeregu tego szereg potęgowy

$$Q(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{24} + \frac{z^6}{24} + \frac{z^7}{24} + \frac{z^8}{64} - \ldots \tag{b}$$

który jest na całem swem kole zbieżności zbieżny jednostajnie, ale nie bezwzględnie.

[1]) Por. E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* Berlin 1916, p. 61. Inny przykład szeregu o żądanej własności dał L. Fejér w *Sitzungsber. d. Bayerischen Akademie d. Wiss.* 1917, p. 49.

[2]) Biuletyn Akademji Krakowskiej, czerwiec 1918.

[3]) *Mathematische Annalen* 25, p. 424.

[4]) Prace matematyczno-fizyczne t. 29, p. 263.

Dla dowodu okażemy przedewszystkiem, że szereg (a) jest zbieżny jednostajnie dla $|z|=1$.

Oznaczmy przez $P_n(z)$ sumę n pierwszych składników szeregu (a). Dla $z=1$ szereg (a) staje się szeregiem

$$P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

o składnikach naprzemian dodatnich i ujemnych, malejących bezwzględnie; mamy zatem:

$$|P_q(1) - P_p(1)| < \frac{1}{2(p+1)}, \quad \text{dla } q > p.$$

Dla $z \neq 1$ możemy napisać:

$$P_q(z) - P_p(z) = \sum_{n=p+1}^{q} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} \cdot \frac{z^{2^n} - z^{2^{n-1}}}{z-1},$$

skąd, z uwagi że wobec $|z|=1$, mamy $|z^{2^n} - z^{2^{n-1}}| \leq 2$;

$$|P_q(z) - P_p(z)| \leq \frac{2}{|z-1|} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{2^n n} < \frac{2}{|z-1|(p+1)} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^p(p+1)|z-1|}.$$

Stąd, w jednej chwili:

$$|P_q(z) - P_p(z)| < \frac{2}{p+1}, \quad \text{dla } |z-1| \geq \frac{1}{2^p}, \ |z|=1, \ q>p. \tag{d}$$

Załóżmy teraz, że $|z-1| < \frac{1}{2^p}$, $z \neq 1$. Istnieje wówczas liczba naturalna $k \geq p$ (zależna od z), taka iż

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq |z-1| < \frac{1}{2^k}. \tag{e}$$

Tożsamość

$$z^m - 1 = (z-1)(z^{m-1} + z^{m-2} + \ldots + z + 1)$$

daje dla $|z|=1$:

$$|z^m - 1| \leq m\,|z-1|.$$

Kładąc kolejno $m = 2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n-1$, wnosimy stąd, że każda z 2^{n-1} różnic $z^{2^{n-1}} - 1$ $z^{2^{n-1}+1} - 1, \ldots, z^{2^n-1} - 1$ jest bezwzględnie mniejsza od $2^n\,|z-1|$, skąd w jednej chwili;

$$|z^{2^{n-1}} + z^{2^{n-1}+1} + \ldots + z^{2^n-1} - 2^{n-1}| < 2^{2n-1}\,|z-1|.$$

Mamy zatem, dla $q \leq k+1$, wobec (e):

$$|P_q(z) - P_p(z) - (P_q(1) - P_p(1))| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}\left(z^{2^{n-1}} + z^{2^{n-1}+1} + \ldots + z^{2^n-1} - 2^{n-1}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=p+1}^{q} \frac{2^{2n-1}|z-1|}{2^n n} \leq \frac{1}{2^k(p+1)} \sum_{n=p+1}^{q} 2^{n-1} < \frac{2^q}{2^k(p+1)} \leq \frac{2}{p+1},$$

skąd, wobec (c):

$$| P_q(z) - P_p(z) | < \frac{5}{2(p+1)}, \text{ dla } p < q \leq k+1. \tag{f}$$

Stąd, w szczególności, dla $q = k+1$:

$$| P_{k+1}(z) - P_p(z) | < \frac{5}{2(p+1)}. \tag{g}$$

Zastępując we wzorze (d) p przez $k+1$, możemy, wobec (e), napisać, z uwagi, że $k \geq p$:

$$| P_q(z) - P_{k+1}(z) | < \frac{2}{k+2} \leq \frac{2}{p+2}, \text{ dla } q > k+1,$$

co, wobec (g), daje:

$$| P_q(z) - P_p(z) | < \frac{5}{p+1}, \text{ dla } p < q,\ q > k+1. \tag{h}$$

Wzory (f) i (h) dowodzą, że, w każdym razie, w uważanym przypadku $\left(0 < | z - 1 | < \frac{1}{2^p}\right)$ zachodzi nierówność

$$| P_q(z) - P_p(z) | < \frac{5}{p+1}, \text{ dla } q > p. \tag{j}$$

Lecz, wobec (d), nierówność (j) zachodzi również dla $| z - 1 | \geq \frac{1}{2^p}$, jakoteż, wobec (c), dla $z = 1$; nierówność (j) zachodzi więc zawsze dla $| z | = 1$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu (a) na kole $| z | = 1$.

Niech teraz m oznacza dowolny dany wskaźnik > 1. Oznaczmy przez k_m największą liczbę naturalną, spełniającą nierówność $2^k \leq m$; będzie więc

$$2^{k_m} \leq m < 2^{k_m+1},$$

i przeto, oznaczając przez $Q_m(z)$ sumę m pierwszych składników szeregu (b), będziemy mieli:

$$Q_m(z) = P_{k_m}(z) + \frac{(-1)^{k_m}}{2^{k_m+1}(k_m+1)} (z^{2^{k_m}} + z^{2^{k_m}+1} + \ldots + z^m),$$

skąd, z uwagi, że dla $| z | = 1$ mamy

$$| z^{2^{k_m}} + z^{2^{k_m}+1} + \ldots + z^m | \leq m + 1 - 2^{k_m} \leq 2^{k_m+1} - 2^{k_m} = 2^{k_m},$$

znajdujemy:

$$| Q_m(z) - P_{k_m}(z) | < \frac{1}{2(k_m+1)},$$

co, z uwagi, że k_m wzrasta nieograniczenie wraz z m, oraz że ciąg $P_{k_m}(z)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ jest dla $| z | = 1$ zbieżny jednostajnie, dowodzi jednostajnej zbieżności ciągu $Q_m(z)$, a więc i szeregu $Q(z)$ dla $| z | = 1$.

Z drugiej strony, szereg (b) nie jest dla $z = 1$ zbieżny bezwzględnie, gdyż, łącząc odpowiednio w grupy jego składniki, otrzymujemy z niego szereg (a), który jest dla $z = 1$ zbieżny warunkowo (wynika stąd zarazem, że koło $| z | = 1$ jest kołem zbieżności badanego szeregu potęgowego).

Wszystkie żądane własności szeregu (b) zostały więc udowodnione.

§ 127. Twierdzenie 162 (Abela). *Jeżeli szereg potęgowy*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{19}$$

jest zbieżny dla $x = 1$ (choćby tylko warunkowo), to w całym przedziale (0,1) jest on zbieżny jednostajnie i przeto przedstawia w tym przedziale funkcję ciągłą.

Dowód. Jak zakładamy, szereg

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

jest zbieżny; oznaczmy przez s_n sumę n pierwszych jego składników i połóżmy

$$r_n = f(1) - s_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

będzie więc:

$$\lim_{n=\infty} r_n = 0 \tag{20}$$

oraz (wobec $s_{n+1} - s_n = a_n$):

$$r_n - r_{n+1} = a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

Szereg

$$Q_n(x) = r_{n+1} x^n + r_{n+2} x^{n+1} + r_{n+3} x^{n+2} + \ldots \tag{22}$$

jest oczywiście (przy wszelkiem naturalnem n) zbieżny dla $0 \leq x < 1$, gdyż dla dostatecznie wielkich k mamy, wobec (20), stale $|r_k| < 1$ i przeto składniki szeregu (22) są, poczynając od pewnego miejsca, bezwzględnie mniejsze od składników szeregu geometrycznego zbieżnego.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec (20) istnieje dla liczby ε takie μ, iż

$$| r_k | < \varepsilon \text{ dla } k > \mu, \tag{23}$$

skąd, wobec (22), dla $n > \mu$ (przy $0 \leq x < 1$):

$$| Q_n(x) | < \varepsilon x^n + \varepsilon x^{n+1} + \varepsilon x^{n+2} + \ldots = \frac{\varepsilon x^n}{1-x} < \frac{\varepsilon}{1-x}$$

i przeto:

$$| (1-x)\, Q_n(x) | < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu,\ 0 \leq x < 1. \tag{24}$$

Wobec zbieżności szeregu (22) dla $0 \leq x < 1$, znajdujemy:

$$(1-x)\,Q_n(x) = Q_n(x) - x\,Q_n(x) = r_{n+1}x^n - r_{n+1}x^{n+1} + \\ + r_{n+2}x^{n+1} - r_{n+2}x^{n+2} + \ldots = r_n x^n - (r_n - r_{n+1})x^n - \\ - (r_{n+1} - r_{n+2})x^{n+1} - (r_{n+2} - r_{n+3})x^{n+2} - \ldots,$$

skąd, wobec (21):

$$(1-x)\,Q_n(x) = r_n x^n - a_n x^n - a_{n+1}x^{n+1} - a_{n+2}x^{n+2} - \ldots,$$

co daje:

$$a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots = r_n x^n - (1-x)Q_n(x), \text{ dla } 0 \leq x < 1,$$

skąd, wobec (23) i (24):

$$|a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots| < 2\varepsilon, \text{ dla } n > \mu. \tag{25}$$

Nierówność tę wyprowadziliśmy, zakładając, że $0 \leq x < 1$: jest ona jednak prawdziwą i dla $x = 1$, w myśl (23) (gdyż dla $x = 1$ lewa strona nierówności (25) staje się liczbą $|r_n|$). Nierówność (25) jest więc prawdziwą dla $0 \leq x \leq 1$, co dowodzi, że szereg (19) jest w całym przedziale (0,1) zbieżny jednostajnie, *c. b. d. o.* Udowodniliśmy więc twierdzenie 162.

Wniosek. *Jeżeli szereg potęgowy*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{26}$$

jest zbieżny dla punktu $z = z_0 \neq 0$, to jest on zbieżny jednostajnie (i przeto przedstawia funkcję ciągłą) w całym zbiorze Z wszystkich liczb zespolonych postaci $z_0 x$, gdzie $0 \leq x \leq 1$.

Dowód. W myśl założenia naszego zbieżnym jest szereg

$$f(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \ldots$$

Połóżmy

$$F(x) = f(z_0 x) = a_0 + a_1 z_0 x + a_2 z_0^2 x^2 + \ldots$$

— będzie to szereg potęgowy względem x, zbieżny dla $x = 1$, a więc, w myśl tw. 162, zbieżny jednostajnie w całym przedziale $0 \leq x \leq 1$, co dowodzi zbieżności jednostajnej szeregu (26) dla wszystkich liczb zespolonych postaci $z_0 x$, gdzie $0 \leq x \leq 1$, *c. b. d. o.*

Z twierdzenia 162 wynika natychmiast

Twierdzenie 162^a^. *Jeżeli*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = 0,$$

to dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie $\delta > 0$, iż

$$|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots| < \varepsilon, \text{ dla } 1 - \delta < x < 1.$$

Zauważymy, że twierdzenie to nie daje się odwrócić. Np. dla szeregu

$$f(x) = \frac{1}{2} - x + x^2 - x^3 - \ldots,$$

który jest zbieżny dla $|x| < 1$, mamy:

$$|f(x)| = \frac{1-x}{2(1+x)} < 1 - x, \text{ dla } 0 < x < 1,$$

i przeto (przy $0 < \varepsilon < 1$):

$$|f(x)| < \varepsilon \text{ dla } 1 - \varepsilon < x < 1,$$

natomiast szereg

$$f(1) = \frac{1}{2} - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

jest rozbieżny.

Istnieją też szeregi potęgowe, których suma jest dla $|z| < 1$ stale bezwzględnie ≤ 1, a jednak rozbieżne dla $z = 1$, i to w ten sposób, że sumy cząstkowe nie są ograniczone[1]).

Przy pewnych atoli warunkach twierdzenie 162^a^ daje się odwrócić: np. przy założeniu, że $\lim\limits_{n=\infty} n a_n = 0$. Zachodzi mianowicie następujące

Twierdzenie 163 (Taubera). *Jeżeli*

$$\lim_{n=\infty} n a_n = 0 \tag{27}$$

(co oczywiście pociąga za sobą zbieżność szeregu potęgowego

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{28}$$

dla $|z| < 1$) *i, jeżeli*

$$\lim_{n=\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0, \tag{29}$$

to mamy

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = 0. \tag{30}$$

Dowód. Wobec (27) mamy $\lim\limits_{n=\infty} n\,|a_n| = 0$, skąd, w myśl tw. 110:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| = 0. \tag{31}$$

Wobec (27), (31) i (29) istnieje dla liczby dodatniej ε takie μ iż

$$k\,|a_k| < \varepsilon \text{ dla } k > \mu \tag{32}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\,|a_n| < \varepsilon \text{ dla } n > \mu \tag{33}$$

[1]) Zob. E. Landau, l. c. § 3.

oraz

$$\left| f\left(1-\frac{1}{n}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{dla } n > \mu. \tag{34}$$

Połóżmy

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{35}$$

Wobec (35) i (28) możemy napisać, dla $n > 0$, $0 \leq x < 1$:

$$s_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k,$$

zatem, wobec $1 - x^k = (1-x)(1 + x + \ldots + x^{k-1}) \leq (1-x)k$ (dla $0 \leq x < 1$):

$$| s_n - f(x) | \leq (1-x) \sum_{k=1}^{n} k \, | a_k | + \sum_{k=n+1}^{\infty} | a_k | \, x^k. \tag{36}$$

Lecz, wobec (32) mamy, dla $n > \mu$, $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} | a_k | x^n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k \, | a_k | \frac{x_k}{k} \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{n} < \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon}{n(1-x)}$$

skąd, wobec (33) i (36):

$$| s_n - f(x) | < n(1-x)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n(1-x)}, \text{ dla } n > \mu, \ 0 \leq x < 1,$$

zatem, dla $x = 1 - \dfrac{1}{n}$:

$$\left| s_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| < 2\varepsilon, \quad \text{dla } n > \mu,$$

skąd, wobec (34):

$$| s_n | < 3\varepsilon, \text{ dla } n > \mu,$$

co, wobec (35), dowodzi wzoru (30).

Udowodniliśmy więc twierdzenie 163.

§ 128. **Twierdzenie 164.** *Jeżeli, oznaczając przez $f(z)$ szereg potęgowy*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{37}$$

mamy dla ciągu nieskończonego z_n liczb różnych od zera i zmierzających do zera stale $f(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, to wszystkie współczynniki szeregu potęgowego $f(z)$ są równe zeru.

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są spełnione (skąd oczywiście wynika, że promień zbieżności szeregu (37)

jest dodatni). Załóżmy dalej, że nie wszystkie współczynniki szeregu (37) są równe zeru i niech a_k (gdzie k jest jedną z liczb $0, 1, 2, \ldots$) oznacza pierwszy jego współczynnik różny od zera. Możemy więc napisać:

$$f(z_n) = a_k z_n^k + a_{k+1} z_n^{k+1} + a_{k+2} z_n^{k+2} + \ldots = 0, (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{38}$$

skąd, dzieląc przez $z_n^k \neq 0$;

$$a_k + a_{k+1} z_n + a_{k+2} z_n^2 + \ldots = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{39}$$

Połóżmy

$$\varphi(z) = a_k + a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \ldots \tag{40}$$

— będzie to szereg potęgowy, zbieżny, jak łatwo widzieć, w tem samem kole zbieżności co i szereg (37) [gdyż stale $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z^k}$, dla $z \neq 0$], a więc przedstawiający wewnątrz tego koła funkcję ciągłą (§ 125). Stąd, wobec założenia $\lim\limits_{n=\infty} z_n = 0$, wnosimy, że $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(z_n) = \varphi(0)$, czyli, wobec (40): $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(z_n) = a_k$. Z drugiej zaś strony, wobec (40) i (39) mamy stale $\varphi(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ i przeto $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(z_n) = 0$. Jest więc $a_k = 0$, wbrew definicji a_k.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 163.

Z dowiedzionego twierdzenia otrzymujemy natychmiastowy

Wniosek: *Jeżeli dwa szeregi potęgowe mają odpowiednio równe wartości dla ciągu nieskończonego liczb różnych od zera i zmierzających do zera, to odpowiednie współczynniki są w obu szeregach równe.*

Wystarczy bowiem różnicę uważanych szeregów przedstawić jako szereg potęgowy i zastosować tw. 163.

Wynika stąd też natychmiast, że żadna funkcja zmiennej zespolonej nie może dawać w kole o dodatnim promieniu zbieżności dwóch różnych rozwinięć na szereg potęgowy.

Podobnież żadna funkcja zmiennej rzeczywistej nie może przy dodatniem R dawać w przedziale $(-R, R)$ dwóch różnych rozwinięć na szereg potęgowy.

§ 129. Pochodna szeregu potęgowego.

Niech

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{41}$$

będzie dany szereg potęgowy, $R \neq 0$ — jego promień zbieżności (skończony lub nieskończony), zaś z_0 niech oznacza liczbę zespoloną taką iż $|z_0| < R$.

Obierzmy liczbę dodatnią ρ pośrednią między $|z_0|$ i R.

Połóżmy $\rho_0 = |z_0|$: szeregi $f(\rho)$ oraz $f(\rho_0)$ będą, wobec $\rho_0 < \rho < R$ oba zbieżne bezwzględnie; zbieżnym bezwzględnie będzie też szereg

$$\frac{f(\rho)-f(\rho_0)}{\rho-\rho_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\rho^k-\rho_0^k}{\rho-\rho_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\rho^{k-1}+\rho^{k-2}\rho_0+\ldots+\rho\rho_0^{k-2}+\rho_0^{k-1})$$

i przeto szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (\rho^{k-1}+\rho^{k-2}\rho_0+\ldots+\rho\rho_0^{k-2}+\rho_0^{k-1})$$

będzie zbieżny.

Połóżmy

$$\varphi_k(z) = a_k(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\ldots+z_0^{k-1}); \quad (k=1, 2, 3, \ldots) \qquad (43)$$

dla $|z| \leq \rho$ będzie oczywiście

$$|\varphi_k(z)| \leq |a_k| (\rho^{k-1}+\rho^{k-2}\rho_0+\ldots+\rho_0^{k-1}), \quad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

i przeto składniki szeregu nieskończonego

$$F(z) = \varphi_1(z)+\varphi_2(z)+\varphi_3(z)+\ldots \qquad (44)$$

będą (dla $|z| \leq \rho$) odpowiednio mniejsze bezwzględnie od składników szeregu (42) i przeto szereg (44) będzie zbieżny jednostajnie dla $|z| \leq \rho$. Z uwagi, że składniki $\varphi_k(z)$ szeregu (44) są (jako wielomiany całkowite względem z) funkcjami ciągłemi zmiennej z, wnosimy więc (w myśl tw. 147), że $F(z)$ jest funkcją ciągłą dla $|z| \leq \rho$. Wynika stąd, wobec $|z_0| < \rho$, że dla każdej danej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ, taka iż nierówność

$$|z-z_0| < \delta \qquad (45)$$

pociąga za sobą nierówności $|z| < \rho < R$, oraz:

$$|F(z)-F(z_0)| < \varepsilon. \qquad (46)$$

Lecz, w myśl (44):

$$F(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_0)$$

(przyczem zbieżność wypisanego szeregu wynika z uwagi, że $|z_0| < \rho$), zaś, w myśl (42):

$$\varphi_k(z_0) = k a_k z_0^{k-1}:$$

jest więc

$$F(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \qquad (47)$$

Z drugiej strony, dla $|z| < R$ zbieżnym jest szereg (41), i dla $|z| < R$, $z \neq z_0$, mamy:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k-z_0^k}{z-z_0},$$

skąd, z uwagi, że wobec (43)

$$a_k \frac{z^k-z_0^k}{z-z_0} = a_k(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\ldots+z_0^{k-1}) = \varphi_k(z),$$

znajdujemy, w myśl (44):

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) = F(z). \qquad (48)$$

Nierówność (46) daje, wobec (47) i (48), dla $0 < |z-z_0| < \delta$:

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| < \varepsilon. \qquad (49)$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ taka, iż nierówność (45) pociąga za sobą nierówność (49).

Jeżeli dla danej funkcji zmiennej zespolonej $f(z)$, danego punktu z_0 i danej liczby A istnieje przy wszelkiem dodatniem ε odpowiednie dodatnie δ, takie iż nierówność

$$0 < |z-z_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - A \right| < \varepsilon,$$

to mówimy, że funkcja $f(z)$ posiada dla punktu z_0 *pochodną*

$$f'(z_0) = A.$$

Wobec tego otrzymany wyżej wynik możemy wypowiedzieć, mówiąc, że funkcja $f(z)$ posiada dla punktu z_0 pochodną

$$f'(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1}. \tag{50}$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego punktu z_0, leżącego wewnątrz koła zbieżności danego szeregu potęgowego (41), istnieje pochodna, określona wzorem (50).

Szereg potęgowy

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = a_1 + 2a_2 z + 2a_3 z^2 + \dots$$

nazywamy *szeregiem pochodnym* dla szeregu (40). Dowiedliśmy więc zarazem, że szereg pochodny jest zbieżny w całem wnętrzu koła zbieżności danego szeregu potęgowego i przedstawia pochodną tego ostatniego.

Z drugiej strony łatwo widzieć, że szereg pochodny jest rozbieżny w każdym punkcie, w którym rozbieżny jest dany szereg potęgowy. Jeżeli bowiem szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k z_1^{k-1}$ jest zbieżny, to zbieżnym jest też szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k z_1^k$ i przeto, w myś tw. 104, zbieżnym jest szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z_1^k$, co dowodzi zbieżności danego szeregu potęgowego w każdym punkcie, w którym zbieżnym jest jego szereg pochodny.

Szereg pochodny ma więc ten sam promień zbieżności co i szereg dany. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 165. *Szereg pochodny każdego danego szeregu potęgowego posiada to samo koło zbieżności co i dany szereg i wewnątrz niego przedstawia wszędzie pochodną szeregu danego.*

W szczególności, szereg pochodny szeregu potęgowego bezustannie zbieżnego jest bezustannie zbieżny.

Co się tyczy zachowania się szeregu pochodnego na samem kole zbieżności, w porównaniu z zachowaniem się na tem kole szeregu danego, to z jednej strony, jak dowiedliśmy, szereg pochodny jest rozbieżny w każdym punkcie, w którym rozbieżnym jest dany szereg potęgowy; z drugiej jednak strony szereg pochodny może być rozbieżny i w punktach, w których zbieżnym jest szereg

dany: np. szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ jest zbieżny dla $z=1$, zaś szereg pochodny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ jest dla $z=1$ rozbieżny; podobnież, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest (w myśl tw. 104) zbieżny dla $|z|=1$, $z \neq 1$, zaś szereg pochodny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ jest dla $|z|=1$ stale rozbieżny.

Niech

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \tag{51}$$

oznacza dany szereg potęgowy, R — jego promień zbieżności. W myśl tw. 165, jego szereg pochodny

$$f'(z) = 1 \,.\, a_1 + 2 \,.\, a_2 z + 3 \,.\, a_3 z^2 + 4 \,.\, a_4 z^3 + \dots \tag{52}$$

będzie posiadał to samo koło zbieżności co i szereg (51), przedstawiając wewnątrz niego wszędzie pochodną funkcji $f(z)$. W myśl tegoż tw. 165 szereg

$$f''(z) = 1 \,.\, 2a_2 + 2 \,.\, 3a_3 z + 3 \,.\, 4a_4 z^2 + 4 \,.\, 5a_5 z^3 + \dots, \tag{53}$$

pochodny dla szeregu (52), będzie przedstawiał wewnątrz koła o promieniu R pochodną funkcji $f'(z)$. Funkcję $f''(z)$, czyli pochodną pochodnej funkcji $f(z)$, nazywamy *drugą pochodną* funkcji $f(z)$, albo jej *pochodną drugiego rzędu*. Podobnież szereg pochodny dla szeregu (53), czyli szereg

$$f'''(z) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3a_3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4a_4 z + 3 \,.\, 4 \,.\, 5a_5 z^2 + \dots$$

wyznacza wewnątrz koła o promieniu R funkcję $f'''(z)$, będącą pochodną funkcji $f''(z)$ i zwaną trzecią pochodną funkcji $f(z)$, lub jej pochodną trzeciego rzędu, i t. d. Ogólnie, pochodną n-go rzędu funkcji $f(z)$ [czyli pochodną funkcji $f^{(n-1)}(z)$] będzie (wewnątrz koła o promieniu R):

$$f^{(n)}(z) = 1 \,.\, 2 \dots n a_n + 2 \,.\, 3 \dots (n+1) a^{n+1} z + 3 \,.\, 4 \dots (n+2) a_{n+2} z^2 + \dots$$
$$(\text{dla } n = 1, 2, 3, \dots)$$

Stąd, w szczególności, kładąc $z=0$, otrzymujemy:

$$f(0) = a_0, \quad f^{(n)}(0) = n!\, a_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

co daje:

$$a_0 = f(0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

i przeto, w myśl (51) (dla $|z| < R$):

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} z^3 + \dots$$

Jest to t. zw. *wzór* **Maclaurin'a**. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 166. *Jeżeli funkcja $f(z)$ rozwija się dla $|z| < R$ na szereg potęgowy, to uważana funkcja posiada dla $|z| < R$ pochodne każdego rzędu, a rozwinięciem jej na szereg potęgowy jest szereg Maclaurina.*

Zauważymy, że twierdzenia niniejszego paragrafu pozostaną w mocy (bez zmiany dowodów), jeżeli je ograniczymy do zbioru liczb rzeczywistych: należałoby wówczas tylko *koło* zbieżności zastąpić przez *przedział* $(-R, R)$.

§ 130. Weźmy teraz pod rozwagę nieco ogólniejsze szeregi potęgowe, postaci

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots, \tag{54}$$

gdzie a oraz a_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ są dane liczby zespolone. Kładąc

$$z - a = \zeta, \tag{55}$$

otrzymujemy z szeregu (54) szereg potęgowy

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots \tag{56}$$

Oznaczmy przez R promień zbieżności szeregu (56): szereg (56) będzie więc zbieżny dla $|\zeta| < R$ oraz rozbieżny dla $|\zeta| > R$. Wnosimy stąd natychmiast (wobec (55)), że szereg (54) będzie zbieżny dla wszystkich liczb zespolonych z, spełniających warunek $|z-a| < R$, i rozbieżny dla wszystkich liczb zespolonych z, dla których $|z-a| > R$.

O punktach z, spełniających odpowiednie warunki: $|z-a| < R$, $|z-a| = R$, $|z-a| > R$, mówimy, że leżą wewnątrz, na obwodzie, lub zewnątrz koła o środku a i promieniu R; przez koło o promieniu $R = \infty$ rozumiemy całą płaszczyznę zmiennej zespolonej (t. j. zbiór wszystkich liczb zespolonych z).

Otrzymany przed chwilą wynik możemy więc wyrazić jak następuje:

Dla każdego szeregu potęgowego $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$ istnieje oznaczone w zupełności koło o środku a, wewnątrz którego szereg ten

jest zbieżny, zaś wewnątrz — rozbieżny: koło to nazywamy kołem zbieżności, zaś jego promień R $(0 \leq R \leq \infty)$ promieniem zbieżności uważanego szeregu.

Niech ρ oznacza liczbę dodatnią $< R$: szereg (56) jest, w myśl tw. 161, zbieżny jednostajnie dla $|\zeta| \leq \rho$: wynika stąd natychmiast, że szereg (54) jest zbieżny jednostajnie dla $|z-a| \leq \rho$, skąd łatwy wniosek, że przedstawia on wewnątrz swego koła zbieżności funkcję ciągłą.

Jeżeli funkcja zmiennej zespolonej $f(z)$ jest określona *w otoczeniu* punktu $z_0 = a$ (t. j. przy pewnem dodatniem r dla wszystkich z, dla których $|z-a| < r$), i jeżeli w otoczeniu tego punktu funkcja $f(z)$ rozwija się na szereg (54), to mówimy, że funkcja $f(z)$ jest w punkcie $z_0 = a$ *holomorficzna*. Z tw. 166 wynika, że szereg (54) jest wówczas określony w zupełności.

Niech $P(z-a)$ oraz $P_1(z-a_1)$ będą dwa szeregi potęgowe: pierwszy według potęg $z-a$, drugi według potęg $z-a_1$. Jeżeli koła zbieżności tych szeregów (pierwsze o środku a, drugie o środku a_1) posiadają wspólne punkty wewnętrzne, i jeżeli w każdym z takich punktów z sumy szeregów $P(z-a)$ oraz $P_1(z-a_1)$ są równe, to mówimy, że szeregi te są jeden dla drugiego *bezpośredniem przedłużeniem analitycznem*.

Jeżeli dla szeregów potęgowych $P(z-a)$ oraz $P_n(z-a_n)$ istnieją szeregi $P_1(z-a_1)$, $P_2(z-a_2), \dots P_{n-1}(z-a_{n-1})$, takie, iż każde dwa stojące obok siebie z szeregów

$$P, \; P_1, \; P_2, \dots P_{n-1}, \; P_n$$

są bezpośredniem przedłużeniem analitycznem jeden dla drugiego, to mówimy, że szeregi $P(z-a)$ oraz $P_n(z-a_n)$ są *przedłużeniem analitycznem* jeden drugiego. Jeżeli koła zbieżności szeregów $P(z-a)$ oraz $P_n(z-a_n)$ mają wspólne punkty wewnętrzne, to sumy tych szeregów niekoniecznie są w tych punktach równe (o ile szeregi te nie są jeden dla drugiego bezpośredniem przedłużeniem analitycznem).

Niech $P(z-a)$ oznacza dany szereg potęgowy. Weźmy pod rozwagę zbiór Z wszystkich punktów z, z których każdy leży wewnątrz koła zbieżności jednego conajmniej z przedłużeń analitycznych szeregu $P(z-a)$. Zbiór Z nazywamy *obszarem istnienia* funkcji analitycznej, odpowiadającej szeregowi $P(z-a)$. (Łatwo widzieć, że zbiór Z składa się z samych tylko punktów wewnętrznych, t j, jeżeli jakiś punkt z_0 należy do zbioru Z, to wszystkie punkty pewnego otoczenia punktu z_0 również należą do Z).

Z drugiej strony, weźmy pod rozwagę zbiór E wszystkich przedłużeń analitycznych szeregu $P(z-a)$ (nie wyłączając samego szeregu P, który możemy uważać jako własne przedłużenie analityczne). Z definicji zbioru Z wynika, że każdy punkt z tego zbioru leży wewnątrz koła zbieżności jednego conajmniej z szeregów zbioru E: oznaczmy, przy danem z, przez $E(z)$ zbiór takich właśnie szeregów. Każdy z szeregów zbioru $E(z)$ jest więc w punkcie z zbieżny, lecz wartości sum tych szeregów w punkcie z mogą być różne. Otóż przyporządkujmy punktowi z zbiór $F(z)$ wszystkich wartości w punkcie z sum szeregów zbioru $E(z)$. W ten sposób każdemu punktowi z zbioru Z będzie odpowiadał oznaczony w zupełności zbiór $F(z)$ wartości zespolonych. Mówimy, że przyporządkowanie to wyznacza *funkcję analityczną* (wielowartościową) (Weierstrass). Jeżeli, w szczególności, dla każdego punktu z zbioru Z zbiór $F(z)$ składa się z jednej tylko liczby, to mamy do czynienia z funkcją analityczną *jednowartościową*. (Ilość wartości funkcji analitycznej może się zmieniać ze zmianą z: można jednak dowieść, że jest ona zawsze conajwyżej przeliczalną) [1].

Każdy szereg potęgowy $P(z-a)$ wyznacza więc oznaczoną w zupełności funkcję analityczną (wogóle wielowartościową): obszar istnienia tej funkcji jest również przez dany szereg wyznaczony w zupełności.

Łatwo widzieć, że dwa szeregi, będące jeden dla drugiego przedłużeniem analitycznem, wyznaczają zawsze tę samą funkcję analityczną i w tym samym obszarze istnienia. Każdy z tych szeregów nazywamy *elementem* uważanej funkcji analitycznej. Teorja funkcyj analitycznych stanowi obszerny i ważny dział analizy, którym się zajmiemy w jednym z dalszych tomów niniejszego dzieła.

§ 131. Weźmy teraz pod rozwagę szeregi według ujemnych potęg z, czyli szeregi typu

$$b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_3}{z^3}+\ldots, \tag{57}$$

gdzie $b_0, b_1, b_2, \ldots$ są dane współczynniki zespolone.

[1] Zob. np. E. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1914, p. 56.

Z tw. 159 wynika natychmiast, że dla każdego danego szeregu (57) istnieje liczba $R'\geq 0$ (skończona lub nieskończona), taka iż szereg ten jest zbieżny (bezwzględnie) dla $|z|>R'$ oraz (w razie $R'>0$) rozbieżny dla $|z|<R'$. Wnosimy stąd dalej natychmiast, że dla każdego danego szeregu

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k=(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots)+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-3}}{z^3}+\ldots \tag{58}$$

istnieją takie liczby R i R' ($\infty\geq R\geq R'\geq 0$), iż szereg (58) jest zbieżny (bezwzględnie) dla

$$R'<|z|<R$$

oraz rozbieżny dla $|z|>R$, jakoteż (w razie $R'>0$) dla $|z|<R'$.

Twierdzenie 167. (Cauchy'ego). *Jeżeli szereg*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \tag{59}$$

jest zbieżny dla

$$R'<|z|<R \tag{60}$$

(gdzie $0\leq R'\leq R\leq+\infty$), *jeżeli, dalej r oznacza liczbę, spełniającą nierówności*

$$R'<r<R \tag{61}$$

i wreszcie, jeżeli suma szeregu (59) spełnia dla

$$|z|=r$$

stale nierówność

$$|f(z)|\leq M, \tag{62}$$

to mamy

$$|a_n|\leq Mr^{-n}, \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots). \tag{63}$$

Dowód. Załóżmy, że przy pewnem r, spełniającem nierówności (61) suma szeregu (59) spełnia dla $|z|=r$ nierówność (62) i niech n oznacza dany wskaźnik $\left(\gtrless 0\right)$, zaś ε — daną liczbę dodatnią.

Szereg (59) jest, wobec (61), jak łatwo widzieć, zbieżny bezwzględnie dla $z=r$, innemi słowy, zbieżne są szeregi

$$|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+|a_3|r^3+\ldots$$

oraz

$$\frac{|a_{-1}|}{r}+\frac{|a_{-2}|}{r^2}+\frac{|a_{-3}|}{r^3}+\dots$$

Dla liczby dodatniej ε istnieje więc takie p, iż

$$\left.\begin{aligned} &|a_p|\,r^p+|a_{p+1}|\,r^{p+1}+\ldots<\varepsilon \\ \text{oraz} \\ &|a_{-p}|\,r^{-p}+|a_{-p-1}|\,r^{-p-1}+\ldots<\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Obierzmy teraz liczbę naturalną m, taką iż

$$m>p+|n| \quad (65)$$

Niech

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$$

będą pierwiastki m-go stopnia z jedności.

Wobec (59) będziemy mieli:

$$\zeta_1^{m-n}f(r\zeta_1)+\zeta_2^{m-n}f(r\zeta_2)+\ldots+\zeta_m^{m-n}f(r\zeta_m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_k r^k\sum_{j=1}^{m}\zeta_j^{m-n+k}\right). \quad (66)$$

W myśl twierdzenia, które udowodnimy w § 143, suma

$$\zeta_1^s+\zeta_2^s+\ldots\zeta_m^s$$

jest zerem dla s całkowitych, niepodzielnych przez m, oraz wynosi m dla s podzielnych przez m. Wnosimy stąd natychmiast, że suma

$$\sum_{j=1}^{m}\zeta_j^{m-n+k}$$

jest $=m$ dla $k=n+lm\ (l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, oraz jest zerem dla pozostałych $\left(\text{całkowitych} \gtrless 0\right) k$. Wzór (66) daje więc:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m}\zeta_j^{m-n}f(r\zeta_j)&=m\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_{n+lm}r^{n+lm}= \\ =m[a_n r^n&+(a_{n+m}r^{n+m}+a_{n+2m}r^{n+2m}+\ldots)+ \\ &+(a_{n-m}r^{n-m}+a_{n-2m}r^{n-2m}+\ldots)] \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Wobec (62), oraz z uwagi, że liczby $\zeta_j (j=1,2,\ldots m)$ są m-temi pierwiastkami z jedności, mamy:

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\zeta_j^{m-n}f(r\zeta_j)\right|\leq\sum_{j=1}^{m}\left|f(r\zeta_j)\right|\leq mM. \quad (68)$$

Wobec (65) mamy $n+m>p$ oraz $n-m<-p$, skąd, wobec (64):

$$|a_{n+m}|\,r^{n+m}+|a_{n+2m}|\,r^{n+2m}+\ldots\leq|a_p|\,r^p+|a_{p+1}|\,r^{p+1}+\ldots<\varepsilon$$

oraz

$$|a_{n-m}|\,r^{n-m}+|a_{n-2m}|\,r^{n-2m}+\ldots\leq|a_{-p}|\,r^{-p}+|a_{-p-1}|\,r^{-p-1}+\ldots<\varepsilon;$$

wzory (67) i (68) dają więc w jednej chwili:

$$m\,|a_n r^n|=\Bigg|\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j^{m-n}f(r\zeta_j)-m(a_{n+m}r^{n+m}+a_{n+2m}r^{n+2m}+\ldots)-$$
$$-m(a_{n-m}r^{n-m}+a_{n-2m}r^{n-2m}+\ldots)\Bigg|>m(M+2\varepsilon),$$

skąd:

$$|a_n|<(M+2\varepsilon)r^{-n},$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε, daje:

$$|a_n|\leq Mr^{-n}.$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem całkowitem $n\left(\gtrless 0\right)$ zachodzi nierówność (63). Udowodniliśmy zatem tw. 167.

Wniosek 1. *Jeżeli suma szeregu potęgowego*

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots \quad (69)$$

spełnia przy pewnem dodatniem ρ *nierówność*

$$|f(z)|\leq M, \quad \text{dla } |z|<\rho, \quad (70)$$

to mamy:

$$|a_n|\leq\frac{M}{\rho^n}, \quad \text{dla } n=0,1,2,\ldots \quad (71)$$

Dowód. Załóżmy, że szereg potęgowy (69) spełnia warunek (70). Niech r oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią $<\rho$. Z założenia naszego wynika, że szereg (69) jest zbieżny dla $|z|<\rho$, skąd wnosimy natychmiast, że $\rho\leq R$, gdzie R oznacza promień zbieżności szeregu (69). Wobec $r < \rho$ będzie więc też $r < R$. Z drugiej strony, wobec (70) oraz $r < \rho$ mamy:

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{dla } |z| = r,$$

skąd, w myśl tw. 167 wnosimy, że

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{72}$$

Nierówność (72) zachodzi więc (przy każdem danem $n = 0, 1, 2, \ldots$) dla każdej liczby dodatniej $r < \rho$, co daje w jednej chwili nierówność (71), *c. b. d. o.*

Wniosek 2. *Funkcja całkowita, która jest ograniczona w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej, musi być liczbą stałą.*

W samej rzeczy, jeżeli suma szeregu (69) jest ograniczoną w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej, to istnieje takie (skończone) M, iż przy wszelkiem dodatniem ρ zachodzi nierówność (70), skąd, w myśl wniosku 1, wynika nierówność (71), która, wobec dowolności liczby dodatniej ρ, daje w jednej chwili:

$$a_n = 0, \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

czyli, wobec (69): $f(z) = a_0$ przy wszelkiem zespolonem z, *c. b. d. o.*

Z wniosku 1 wynika, że warunek (71) jest koniecznym na to żeby suma szeregu potęgowego (69) spełniała nierówność (70). Nie jest on jednak wystarczającym, jak tego dowodzi przykład szeregu geometrycznego

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$$

dla $M = 1$, $\rho = 1$, którego suma nie jest ograniczoną dla $|z| < 1$.

Możnaby udowodnić, że *na to iżby suma szeregu (69) spełniała nierówność (70), potrzeba i wystarcza, iżbyśmy, kładąc*

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

mieli

$$\left| \frac{s_0(z) + s_1(z) + \ldots + s_n(z)}{n+1} \right| \leq M, \quad \text{dla } |z| = \rho, \quad n = 0, 1, 2, \ldots [1].$$

---

[1]) E. Landau, l. c. § 1.

§ 132. Twierdzenie 168 (Weierstrassa). *Jeżeli szeregi*

$$f_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{m,n} z^n \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{73}$$

są zbieżne dla

$$0 \leq R' < |z| < R \leq +\infty, \tag{74}$$

oraz jeżeli szereg

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots \tag{75}$$

jest dla z, spełniających warunki (74), zbieżny jednostajnie, to zbieżnym jest każdy z szeregów

$$a_n = a_{1,n} + a_{2,n} + \ldots + a_{m,n} + \ldots \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{76}$$

oraz dla z, spełniających warunki (74), mamy:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(z). \tag{77}$$

Dowód. Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią.

Wobec jednostajnej zbieżności szeregu (75) dla $R' < |z| < R$, istnieje takie μ, iż

$$\left.\begin{array}{l} |f_{m+1}(z) + f_{m+2}(z) + \ldots + f_{m+p}(z)| < \varepsilon, \ \text{dla } m < \mu, \\ \quad p = 1, 2, \ldots; \ R' < |z| < R. \end{array}\right\} \tag{78}$$

Stąd, wobec (73):

$$\left.\begin{array}{l} \left| \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \ldots + a_{m+p,n}) z^n \right| < \varepsilon, \\ \quad \text{dla } m > \mu, \ p = 1, 2, \ldots, \ R' < |z| < R. \end{array}\right\} \tag{79}$$

Niech r oznacza liczbę dodatnią, pośrednią między R' i R: nierówność (79) będzie więc prawdziwą dla $|z| < r$, skąd, w myśl tw. 167 wnosimy, że

$$\left.\begin{array}{l} |a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \ldots + a_{m+p,n}| \leq \varepsilon r^{-n}, \ \text{dla } m > \mu; \\ \quad p = 1, 2, 3, \ldots; \ n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \end{array}\right\} \tag{80}$$

Wobec (80) wnosimy natychmiast o zbieżności każdego z szeregów (76). Połóżmy

$$\left.\begin{array}{c} r_{m,n} = a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \dots, \\ (m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{array}\right\} (81$$

— będą to więc szeregi zbieżne.

Niech z_0 oznacza liczbę zespoloną, spełniającą nierówności (73 obierzmy liczby R_1 oraz R_1' takie iż

$$R' < R_1' < |z_0| < R_1 < R. \quad (8$$

Ponieważ dla każdej liczby dodatniej r, pośredniej między 1 oraz R, mamy nierówność (79) (gdzie μ zależy jedynie od ε), wię

$$|a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \dots + a_{m+p,n}| < \varepsilon R_1^{-n}$$

oraz

$$|a_{m+1,n} + a_{m+2,n} + \dots + a_{m+p,n}| < \varepsilon R_1'^{-n}$$

$$\text{dla} \left\{ \begin{array}{l} m > \mu, \quad p = 1, 2, \dots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array}\right.$$

Stąd, przechodząc do granicy dla $p = \infty$, wobec (81):

$$|r_{m,n}| \leq \varepsilon R_1^{-n} \text{ oraz } |r_{m,n}| \leq \varepsilon R_1'^{-n}, \text{ dla } m > \mu, \ n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (8$$

Połóżmy:

$$s_{m,n} = a_{1,n} + a_{2,n} + \dots + a_{m,n} \quad (m = 1, 2, 3, \dots; \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (8$$

wobec (81) i w myśl (76), będzie:

$$a_n = s_{m,n} + r_{m,n} \quad (\text{dla } m = 1, 2, 3, \dots; \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8$$

Wobec zbieżności szeregów (73) przy warunku (74), or wobec $R' < |z_0| < R$, wnosimy, w myśl (84), o zbieżności szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m,n} z_0^n, \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

zaś, wobec (83) i (82), wnosimy o zbieżności szeregów

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n, \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

skąd, wobec (85):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m,n} z_0^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (8$$

Lecz, wobec (83) oraz wobec (82):

$$\left.\begin{array}{c} \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n\right| \leq \left|\sum_{n=-\infty}^{-1} r_{m,n} z_0^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n\right| < \\ < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{R_1'}{z_0}\right|^n + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z_0}{R_1}\right|^n < \varepsilon \left(\frac{R_1'}{|z_0| - R_1'} + \frac{R_1}{R_1 - |z_0|}\right) \\ \text{dla } m > \mu. \end{array}\right\} (87)$$

Z drugiej strony, wobec (78) mamy w granicy dla $p = \infty$):

$$|f_{m+1}(z_0) + f_{m+2}(z_0) + \dots| \leq \varepsilon, \text{ dla } m > \mu,$$

skąd, wobec (75):

$$\left|f(z_0) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z_0)\right| \leq \varepsilon, \text{ dla } m > \mu. \quad (88)$$

Lecz, wobec (73) i (84) mamy oczywiście:

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{m} f_k(z_0) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k,n} z_0^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{m} a_{k,n} z_0^n = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{m,n} z_0^n \quad (m = 1, 2 \dots). \end{array}\right\} (89)$$

Wobec (86), (89), (88) i (87) mamy więc dla $m > \mu$:

$$\left|f(z_0) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n\right| \leq \left|f(z_0) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z_0)\right| + \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{m,n} z_0^n\right| <$$
$$< \varepsilon \left(1 + \frac{R_1'}{|z_0| - R_1'} + \frac{R_1}{R_1 - |z_0|}\right),$$

skąd, wobec dowolności liczby dodatniej ε:

$$f(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n,$$

co, wobec (75) dowodzi prawdziwości wzoru (77) dla $z = z_0$.

Udowodniliśmy więc tw. 168.

Z dowiedzionego twierdzenia otrzymujemy w jednej chwili następujący

Wniosek. *Załóżmy, że*

$$F(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots, \quad \text{dla } |y| < S,$$

zaś

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{dla } |z| < R.$$

Jeżeli istnieje liczba dodatnia $A < R$, *taka iż dla* $|z| < A$ *mamy* $|\varphi(z)| \leq S' < S$, *to dla* $|z| < A$ *funkcja* $f(z) = F(\varphi(z))$ *rozwija się na szereg według całkowitych potęg z.*

KONIEC CZĘŚCI DRUGIEJ TOMU PIERWSZEGO.