Transformata Fouriera

Program wykładu

1. Wprowadzenie teoretyczne
2. Algorytm FFT
3. Zastosowanie analizy Fouriera
4. Przykłady programów

Wprowadzenie teoretyczne

Zespolona transformata Fouriera

Jeżeli każdy skończony przedział <*a,b*> można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których *f(x)* jest monotoniczna oraz w każdym punkcie przedziału *(a,b)* są spełnione warunki Dirichleta i funkcja *f(x)* jest całkowalna w przedziale *(-inf,inf)*, to funkcję:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) exp(-iux) dx$$

nazywamy **zespoloną transformatą Fouriera** funkcji *f(x)*.

Wprowadzenie teoretyczne

Zespolona transformata Fouriera

Transformacja Fouriera jest operacją odwracalną, zatem posiadając transformatę *F(u)* możemy wyznaczyć jej **oryginał**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) exp(iux) du$$

Na funkcję *f(x)* oraz jej transformatę *F(u)* należy patrzeć jak na różne reprezentacje tej samej funkcji w różnych dziedzinach na przykład *czas* / *częstotliwość*, czy *położenie* / *wektor falowy*.

Wprowadzenie teoretyczne

Analiza Fouriera

Bardzo często w fizyce i innych naukach ścisłych mierzone wielkości mają charakter okresowy, tzn. taki, który powoduje powtarzanie się danej wielkości fizycznej z określonym okresem. Zazwyczaj taką funkcję okresową można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego zwanego też **szeregiem Fouriera**.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L})$$

Wprowadzenie teoretyczne

Analiza Fouriera

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sin\frac{n\pi x}{L} dx$$

Powyższe wzory określające współczynniki szeregu Fouriera są znane pod nazwą wzorów **Eulera-Fouriera**.

Wprowadzenie teoretyczne

Dyskretna transformata Fouriera

Przypuśćmy, że mamy N kolejnych wartości zmierzonych w odstępach czasu ı , tak że

$$h_k \equiv h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Zamiast próbować znaleźć transformatę dla wszystkich wartości *f* oszacujmy ją jedynie w konkretnych punktach, danych przez:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

Po przybliżeniu całki otrzymujemy $\quad H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n/N}$

Zastosowane powyżej przekształcenie nosi nazwę **dyskretnej transformaty Fouriera**

Algorytm FFT

Uwagi ogólne

- Obliczanie transformaty bezpośrednio ze wzoru jest nieefektywne ze względu na zbyt dużą złożoność obliczeniową.
- Wzrost wydajności przy zastosowaniu FFT

	N	2	4	8	16	32	64	128
DFT	$2N^2$	8	32	128	512	2048	8192	32768
FFT	$\frac{1}{2}Log_2(N)$	2	8	24	64	160	384	896

Algorytm FFT

Idea

Sama idea algorytmu opiera się na tzw. lemacie **Danielsona-Lanczosa**. Odkryli oni, że pojedyńcza DFT o długości N, jest równoważna sumie dwóch transformat o długości N/2, jedna z nich jest złożona z nieparzystych punków spośród oryginalnych N, a druga z parzystych.

$$H_n = \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi inj/(N/2)} f_{2j} + W^n \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi inj/(N/2)} f_{2j+1} = \\ = H_n^e + W^n H_n^o$$

H_n^e oznacza n-ty składnik transformaty o długości N/2, stworzony z parzystych (even) punktów, a H_n^o odpowiednio z nieparzystych (odd).

Algorytm FFT

Algorytm Cooley'a-Tukey'a

<table>
<tr><td colspan="8">Przykład wyznaczania transformaty dla $N = 8$ punktów</td></tr>
<tr><td colspan="8">$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6$</td><td colspan="4">$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_0 \quad a_4$</td><td colspan="2">$a_2 \quad a_6$</td><td colspan="2">$a_1 \quad a_5$</td><td colspan="2">$a_3 \quad a_7$</td></tr>
<tr><td>$000 = 0$
a_0
$000 = 0$</td><td>$100 = 4$
a_4
$001 = 1$</td><td>$010 = 2$
a_2
$010 = 2$</td><td>$110 = 6$
a_6
$011 = 3$</td><td>$001 = 1$
a_1
$100 = 4$</td><td>$101 = 5$
a_5
$101 = 5$</td><td>$011 = 3$
a_3
$110 = 6$</td><td>$111 = 7$
a_7
$111 = 7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_0 = a_0 + a_4$
$b_1 = a_0 - a_4$</td><td colspan="2">$b_2 = a_2 + a_6$
$b_3 = a_2 - a_6$</td><td colspan="2">$b_4 = a_1 + a_5$
$b_5 = a_1 - a_5$</td><td colspan="2">$b_6 = a_3 + a_7$
$b_7 = a_3 - a_7$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$c_0 = b_0 + b_2 \quad c_2 = b_0 - b_2$
$c_1 = b_1 + \omega_4 b_3 \quad c_3 = b_1 - \omega_4 b_3$</td><td colspan="4">$c_4 = b_4 + b_6 \quad c_6 = b_4 - b_6$
$c_5 = b_5 + \omega_4 b_7 \quad c_7 = b_5 - \omega_4 b_7$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$d_0 = c_0 + c_4 \quad d_4 = c_0 - c_4$
$d_1 = c_1 + \omega_8 c_5 \quad d_5 = c_1 - \omega_8 c_5$
$d_2 = c_2 + \omega_8^2 c_6 \quad d_6 = c_2 - \omega_8^2 c_6$
$d_3 = c_3 + \omega_8^3 c_7 \quad d_7 = c_3 - \omega_8^3 c_7$</td></tr>
</table>

$$W_N^{k-\frac{N}{2}} = e^{i2\pi(k-\frac{N}{2})/N} = e^{i2\pi k/N} e^{-i\pi} = -e^{i2\pi k/N} = -W_N^k$$

Zastosowanie analizy Fouriera

Uwagi ogólne

- W ciągu ostatnich lat, wraz z rozwojem elektronicznej techniki obliczeniowej, nastąpił szybki rozwój teorii dotyczących analiz szeregów czasowych.
- Powstawały nowe metody numerycznego opracowania danych, które wcześniej nie mogły być zastosowane, ze względu na ogromną czasochłonność obliczeń.
- Metody te opracowywane były głównie dla potrzeb elektroniki gdzie, aby dostać np. dokładniejsze estymatory widm mocy lub lepszą filtrację, wydłużano szeregi czasowe.

Zastosowanie analizy Fouriera

Analiza Fouriera w fizyce

- Współczynniki Fouriera są interpretowane jako amplitudy odpowiednich składowych harmonicznych.
- Pierwsza składowa przekształcenia a_0 określa wartość stałą. Zależy ona od położenia sygnału względem osi poziomej. W praktyce jest najczęściej pomijana.
- Kwadraty współczynników z dokładnością do czynnika multiplikatywnego określają energię danej składowej harmonicznej.
- W ten sposób można mówić fizycznie o badaniu widma pewnej wielkości fizycznej tzn. rozkładzie energii w funkcji częstotliwości.

Zastosowanie analizy Fouriera

Analiza Fouriera w elektronice

- Widmo sygnału prostokątnego składa się z harmonicznych o częstościach będących całkowitą nieparzystą wielokrotnością częstości podstawowej o amplitudach malejących ze wzrostem częstotliwości harmonicznych.
- Im więcej składowych harmonicznych jest sumowanych tym lepsze jest przybliżenie przebiegu prostokątnego.
- W konkretnych zagadnieniach, kształt badanego sygnału jest na tyle skomplikowany, że trudno jest obliczyć go w sposób ścisły. Problemy z detekcją i szumami.
- Filtracja oraz pasmo przenoszenia sygnału.

Zastosowanie analizy Fouriera

Teoria próbkowania sygnałów

- **Kryterium Nyquista** w teorii próbkowania sygnałów mówi, że dla każdego kroku próbkowania istnieje specjalna częstotliwość f_c zwana *częstotliwością krytyczną Nyquista*.

$$f_c \equiv \frac{1}{2\Delta}$$

- Dlaczego częstotliwość ta jest tak istotna ?
- Zjawisko **aliasingu**.
- Ogromne możliwości kompresji sygnałów.

Zastosowanie analizy Fouriera

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów

- Dzięki istnieniu algorytmu FFT praktyczne stało się cyfrowe przetwarzanie sygnałów (DSP).
- Dyskretna transformata cosinusowa (DCT) używana na przykład w kompresji MP3 oraz JPEG.
- Wykorzystanie transformaty w programach graficznych do cyfrowej obróbki obrazu (filtry).

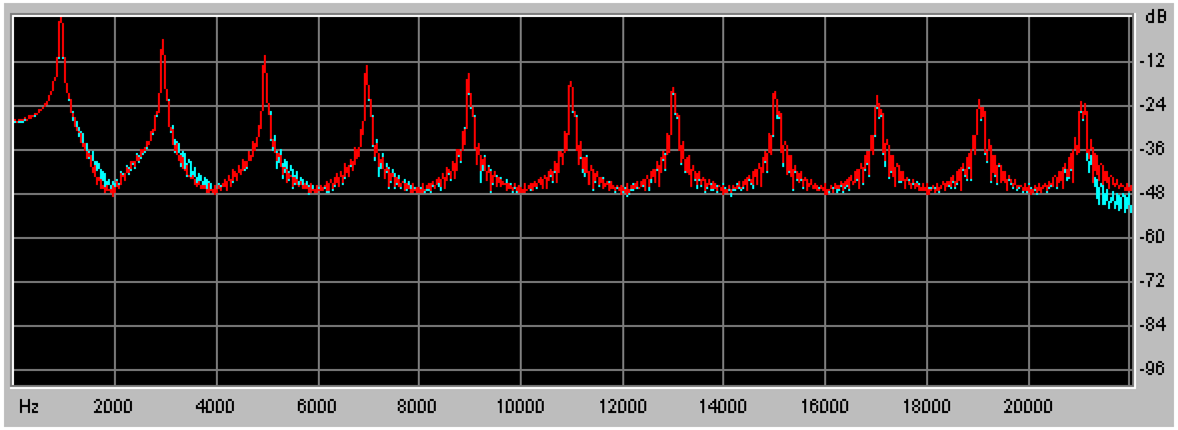
Zastosowanie analizy Fouriera

Kompresja MP3

- Sygnał prostokątny o czasie trwania 0.1s i częstotliwości 1kHz (16bitów, 44100Hz, mono).
- Przetwarzanie przez encoder i dekoder MPEG z włączoną opcją *high quality*.
- Porównanie standardów *Layer2*, *Layer3* o różnych stopniach kompresji.
- Na wykresach przedstawiamy zarówno transformatę sygnału oryginalnego jak i przetworzonego.

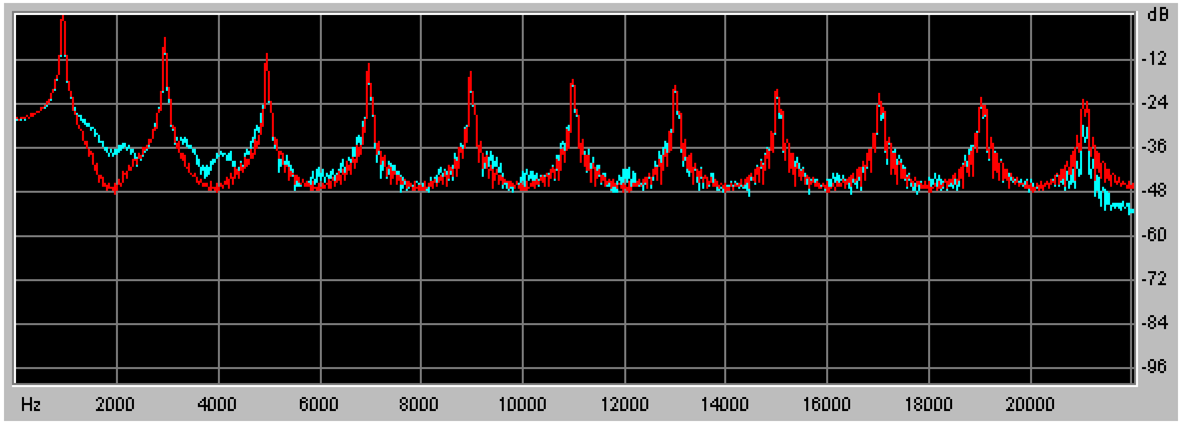
Zastosowanie analizy Fouriera

Kompresja: MP3 vs. MP2 (256 kbps)



Layer 3

256 kbps

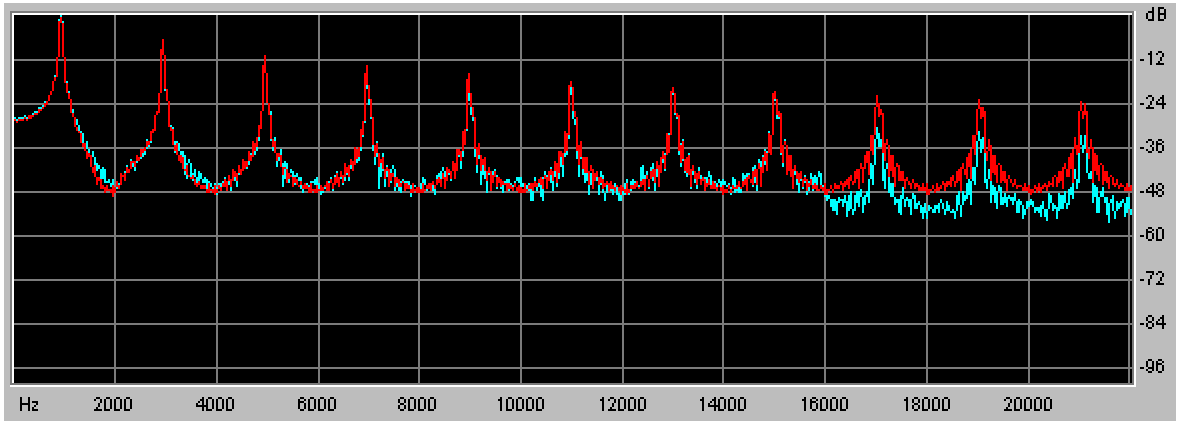


Layer 2

256 kbps

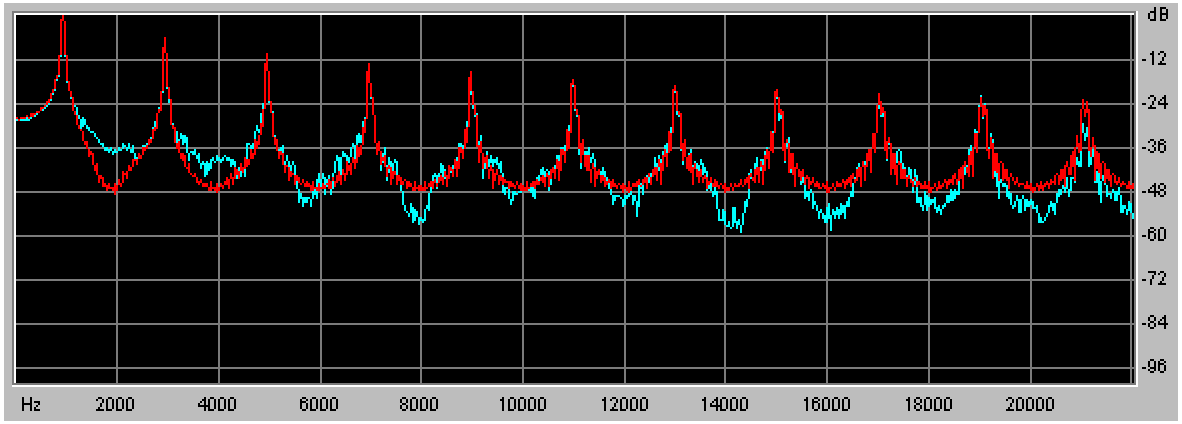
Zastosowanie analizy Fouriera

- Kompresja: MP3 vs. MP2 (128 kbps)



Layer 3

128 kbps

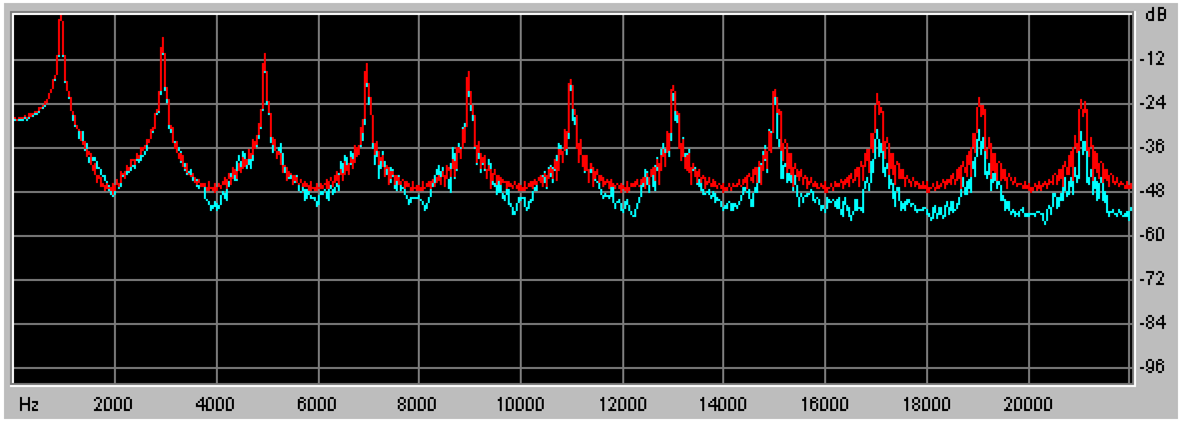


Layer 2

128 kbps

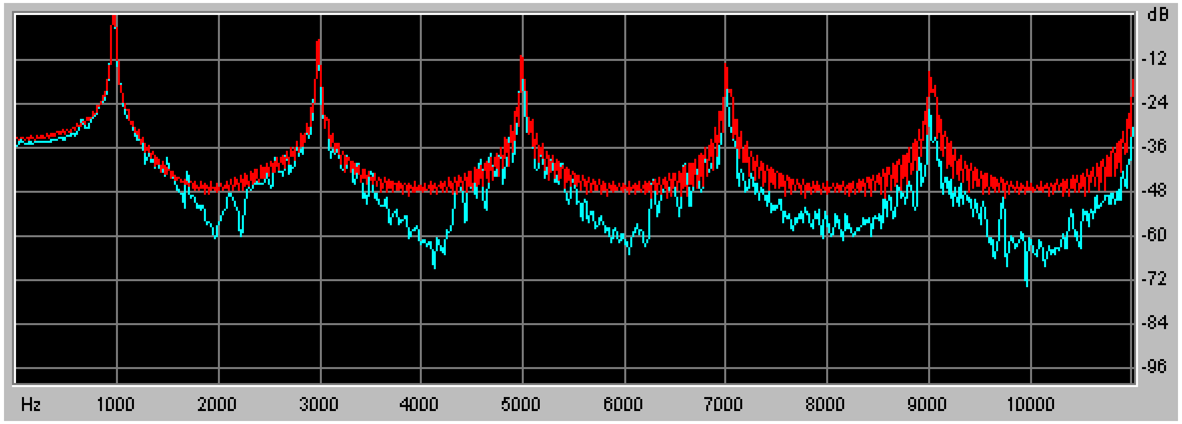
Zastosowanie analizy Fouriera

Kompresja MP3 (64 & 32 kbps)



Layer 3

64 kbps

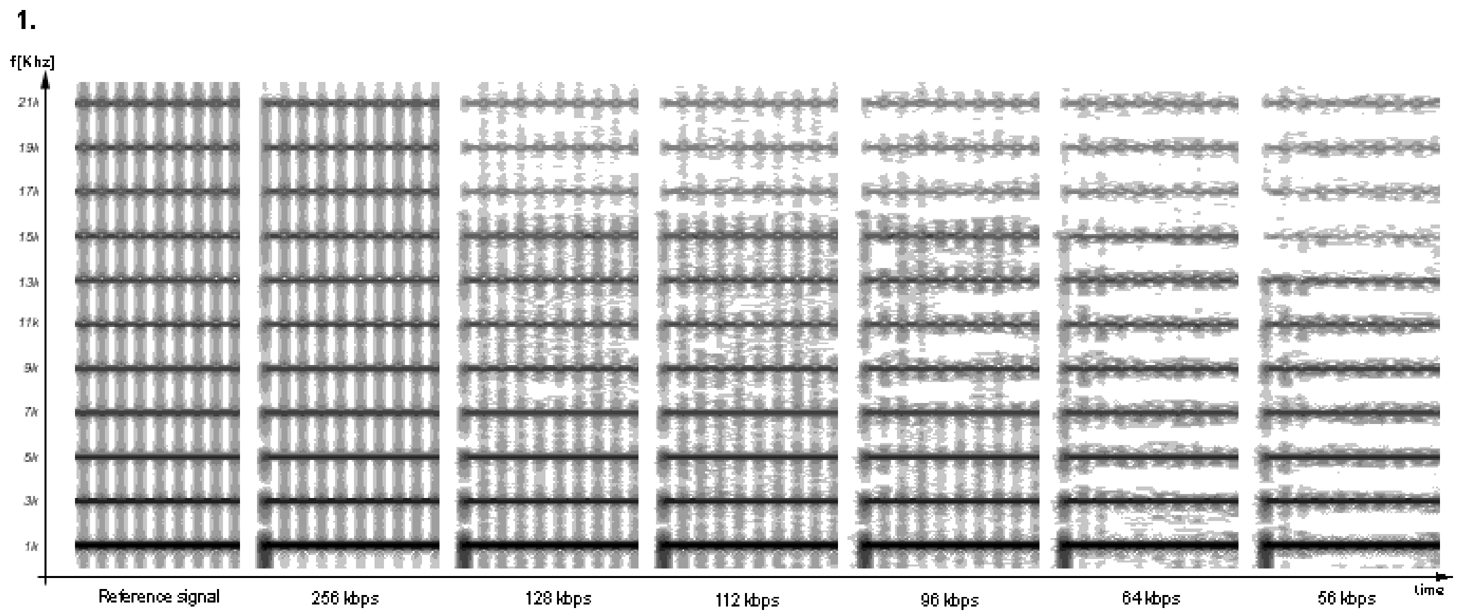


Layer 3

32 kbps

Zastosowanie analizy Fouriera

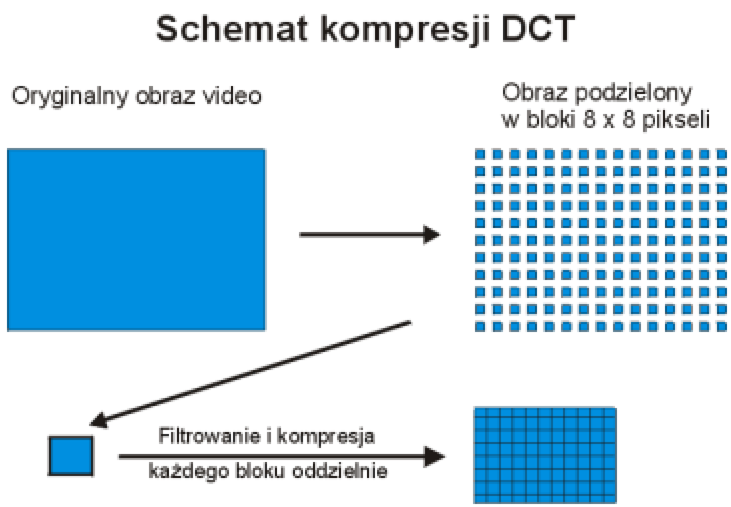
Kompresja MP3



Na wykresie widoczne jest widmo sygnału w funkcji czasu. Poziom harmonicznych reprezentowany jest poprzez odcienie szarości, reprezentowany jest zakres dynamiki ok. 50 dB (dla bardzo silnych sygnałów kolor jest czarny).

Zastosowanie analizy Fouriera

Kompresja JPEG



- Technologia DCT dzieli obraz wideo na bloki po 64 punkty każdy, co tworzy blok 8 x 8.
- Każdy tak utworzony blok jest kompresowany indywidualnie.
- Otrzymujemy w ten sposób obraz ze skazą, która powstaje przy łączeniu tak skompresowanych bloków, a w rezultacie wysoką degradacje jakości wideo.

Zastosowanie analizy Fouriera

Kompresja JPEG

Obraz oryginalny
rozmiar: 196 662 b

Przebieg kompresji

- 3 kanały RGB zastępujemy dwoma kanałami barw i kanałem jaskrawości
- Odrzucenie części pikseli z kanału barw
- Podział na bloki 8x8
- Wykonanie ***DCT*** na każdym bloku
- Zastąpienie liczb zmiennoprzecinkowych liczbami całkowitymi (kompresja stratna)

Zastosowanie analizy Fouriera

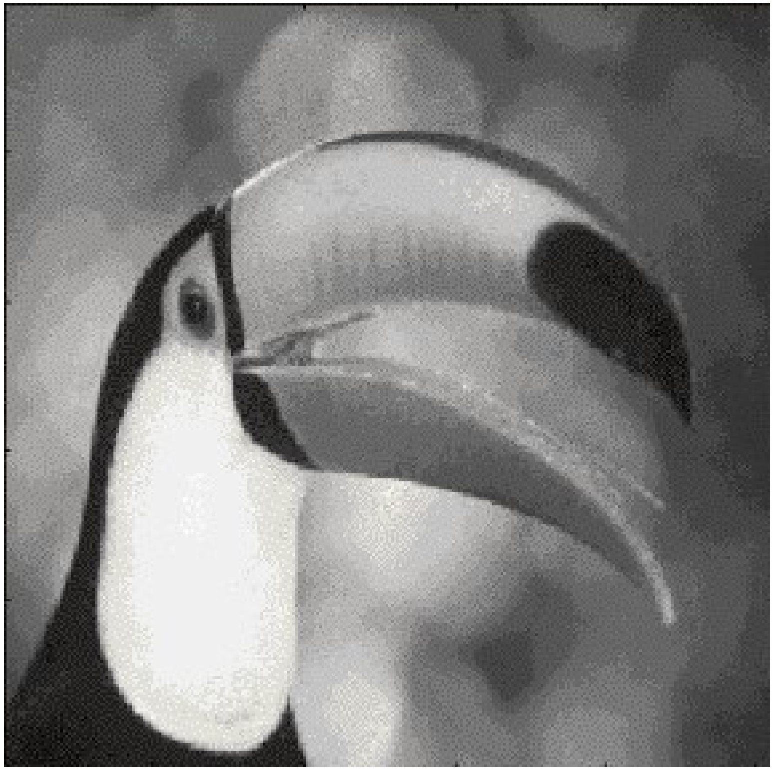
Kompresja JPEG

Kompresja silna
upakowanie danych do
poziomu około 25%
rozmiar: 4 070 b

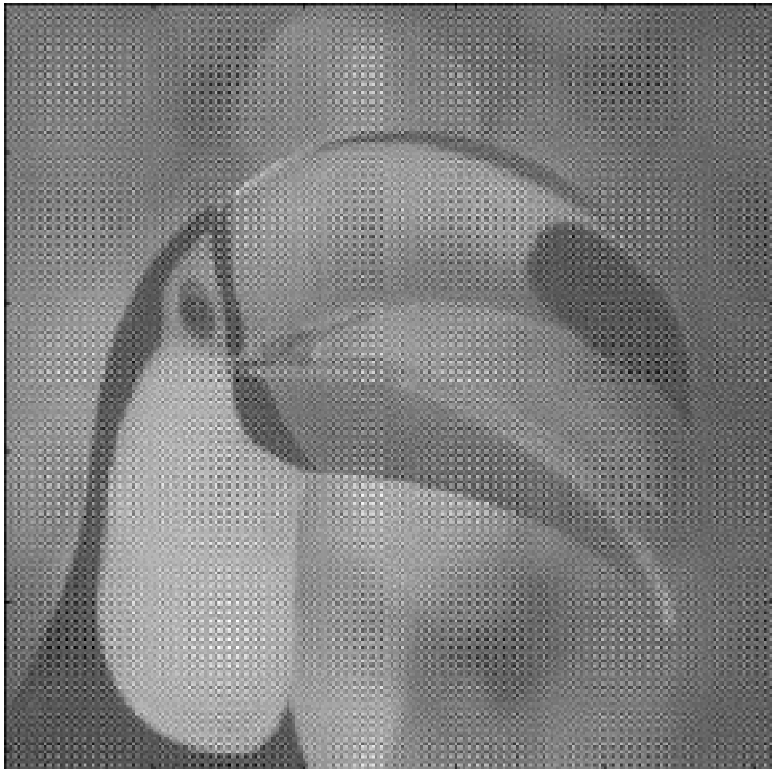
Kompresja bardzo silna
upakowanie danych do
poziomu około 5%
rozmiar: 1 741 b

Zastosowanie analizy Fouriera

Filtracja obrazów



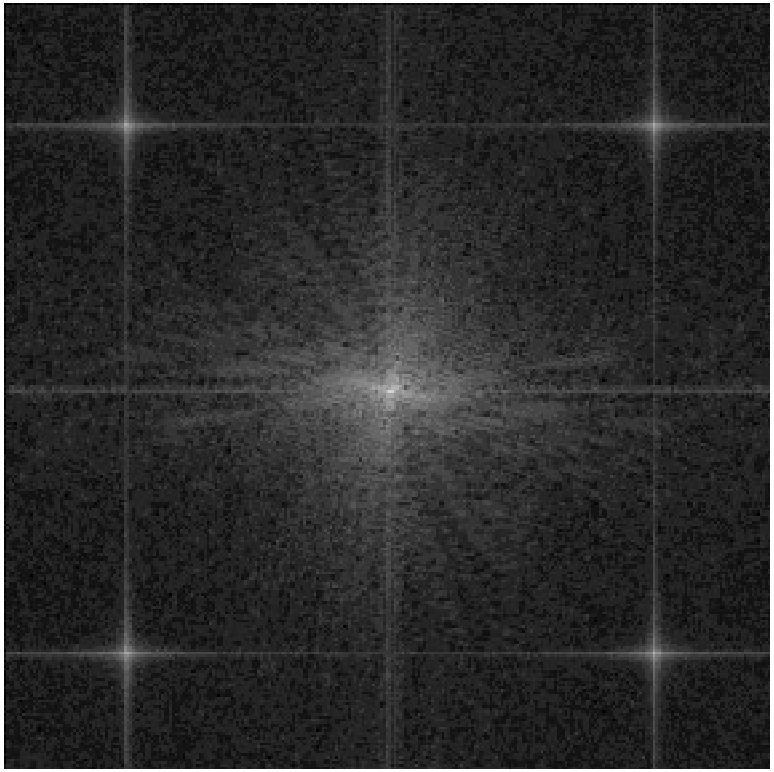
Oryginał



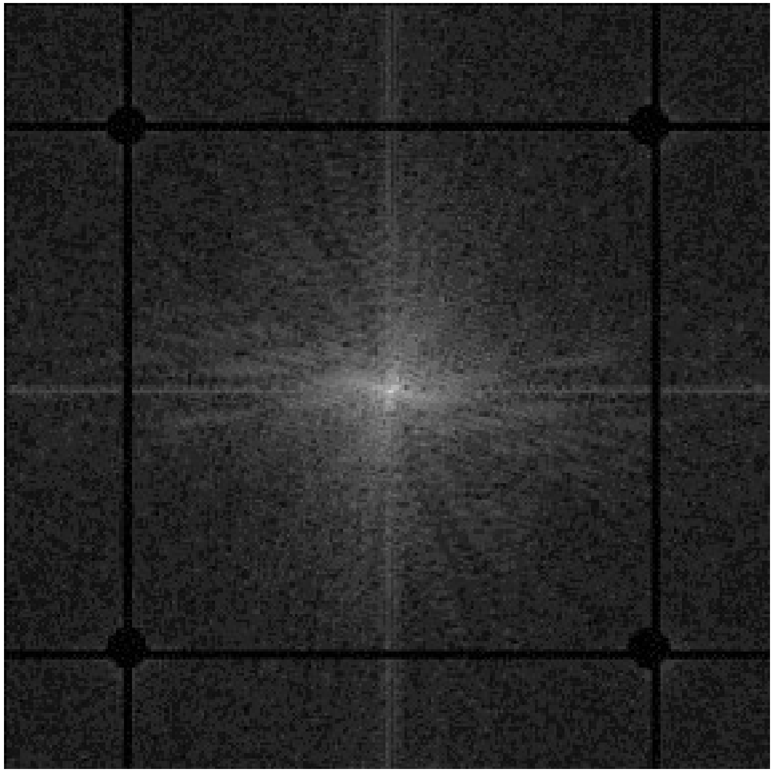
Zniekształcony funkcją o sinusoidalnym kształcie

Zastosowanie analizy Fouriera

Filtracja obrazów



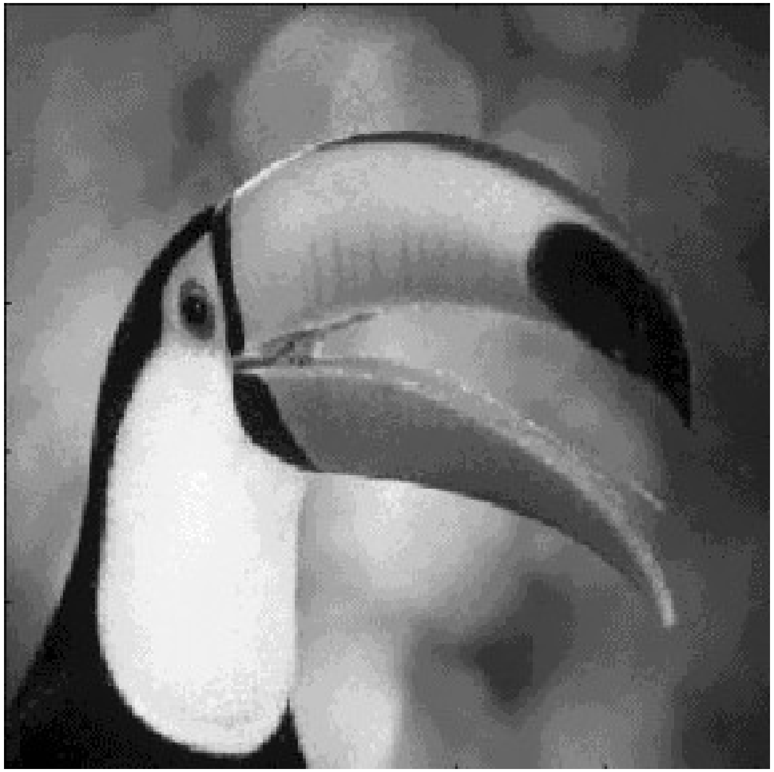
Po wykonaniu transformaty Fouriera



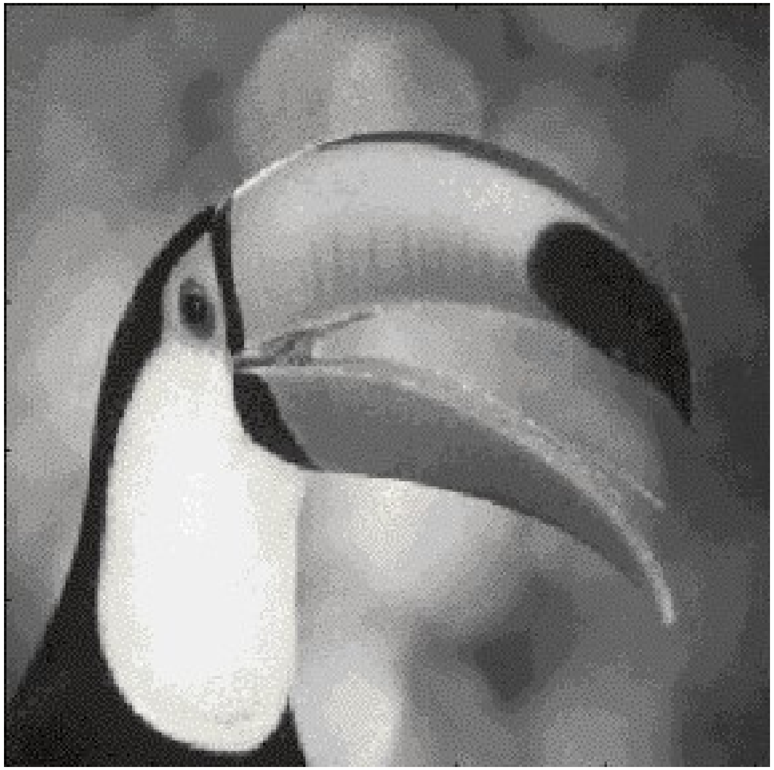
Wyzerowanie wartości odpwiedzialnych za częstości znieksztalceń

Zastosowanie analizy Fouriera

Filtracja obrazów



Obraz po wykonaniu odwrotnej transformaty Fouriera



Oryginał

Przykłady programów

- Składanie harmonicznych
- Analiza typowych sygnałów
- Wybieranie tonowe