SZEREG TRYGONOMETRYCZNY FOURIERA

Rozważmy ciag funkcji:

$$\{1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\},$$

gdzie l jest pewną liczbą dodatnią.
Zauważmy, że na przedziale $< -l, l >$, dla dowolnych dwóch różnych wyrazów tego ciagu $k \neq m$ oraz $k, m \in \{1, 2, \ldots\}$ zachodzi:

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{m\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx = 0,$$

ponadto

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{k\pi x}{l} dx = l,$$

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{k\pi x}{l} dx = l.$$

Ciąg funkcji spełniający powyższe warunki nazywamy ciagiem ortogonalnym.

Definicja
Niech $f(x)$ będzie funkcją całkowalną na przedziale$< -l, l >$. **Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji** $f(x)$ nazywamy szereg postaci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n = 1, 2, ...$$

Jeśli $f(x)$ jest funkcją parzystą to $b_n = 0$ oraz $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$

Jeśli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą to $a_n = 0$ oraz $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

Naturalnym wydaje się pytanie: dla których funkcji szereg trygonometryczny Fouriera jest zbieżny do funkcji? Warunki wystarczające podane są w twierdzeniu Dirichleta.

Twierdzenie Dirichleta

Jeśli funkcja $f(x)$ ograniczona na przedziale $< -l, l >$ jest:

1. przedziałami monotoniczna na $(l, -l)$
2. jest ciągła na $(-l, l)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju; przy czym w każdym punkcie nieciągłości x_0 spełniony jest warunek

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right),$$

3.

$$f(-l) = f(l) = \frac{1}{2}\left(f(-l^+) + f(l^-)\right)$$

to

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

dla każdego $x \in < -l, l >$. Jeśli ponadto funkcja $f(x)$ jest okresowa i jej okres wynosi $2l$ to ostatnia równość zachodzi dla wszystkich x z dziedziny $f(x)$.

Przykład

Wyznaczyć szereg trygonometryczny Fouriera funkcji

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{gdy } x \in (0, l] \\ c & \text{gdy } x \notin [-l, 0). \end{cases},$$

$$b)\quad f(x) = x^2, \quad x \in [-l, l],$$

$$c)\quad f(x) = \sin^4 x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Przykład

Wyznaczyć szereg trygonometryczny Fouriera funkcji

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a następnie obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Tabela współczynników Fouriera niektórych funkcji

$f(x)$	przedział	a_0	a_n	b_n
$\begin{cases} a, & \text{gdy } 0 < x \leq l \\ c, & \text{gdy } -l \leq x < 0 \end{cases}$	$< -l, l >$	$a + c$	0	$\frac{(a-c)(1-(-1)^n)}{n\pi}$
x	$< -l, l >$	0	0	$\frac{(-1)^{n+1} 2l}{n\pi}$
x	$< 0, 2l >$	2l	0	$\frac{-2l}{n\pi}$
x^2	$< -l, l >$	$\frac{2l^2}{3}$	$(-1)^n \left(\frac{2l}{n\pi}\right)^2$	0
x^2	$< 0, 2l >$	$\frac{8l^2}{3}$	$\left(\frac{2l}{n\pi}\right)^2$	$\frac{-4l^2}{n\pi} + \frac{2l^2}{n^3\pi^3}$
x^3	$< -l, l >$	0	0	$\frac{(-1)^n (12-2n^2\pi^2)}{n^3} \left(\frac{l}{\pi}\right)^3$
$\|\sin x\|$	$< 0, \pi >$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$	0
$\|\cos x\|$	$< 0, \pi >$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$	0
$\sin cx$, $c \notin C$	$< -l, l >$, $cl \neq \pi$	0	0	$\frac{(-1)^{n+1} 2n\pi \sin cl}{n^2\pi^2 - c^2l^2}$
$\cos cx$, $c \notin C$	$< -l, l >$, $cl \neq \pi$	$\frac{2 \sin cl}{cl}$	$\frac{(-1)^{n+1} 2cl \sin cl}{n^2\pi^2 - c^2l^2}$	0
e^{cx}	$< -l, l >$	$\frac{2 \sinh cl}{cl}$	$\frac{(-1)^n 2cl \sinh cl}{n^2\pi^2 + c^2l^2}$	$\frac{(-1)^{n+1} 2n\pi \sinh cl}{n^2\pi^2 + c^2l^2}$

1. TRANSFORMATA FOURIERA

1.1 Wzór całkowy Fouriera

Wzór ten wykorzystujemy do analizy funkcji nieokresowych; funkcje te mogą opisywać np.przebiegi eleektryczne. Najpierw sformułujmy tzw. warunki Dirichleta.
Funkcja $f(x)$ spełnia **warunki Dirichleta** gdy:
1. dziedzinę $f(x)$ można rozłożyć na skończoną sumę przedziałów, w których $f(x)$ jest monotoniczna i ciągła
2. w każdym punkcie nieciągłości x_0 , granice jednostronne $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ i $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ są skończone.

Twierdzenie 1 (wzór całkowy Fouriera)
Jeśli $f(x)$ spełnia na każdym przedziale skończonym (a,b) warunki Dirichleta i $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty$ to wzór

$$f(x) = \int_0^\infty (a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin\omega x)\,d\omega \tag{1}$$

gdzie

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt, \tag{2}$$

zachodzi we wszystkich punktach, w których $f(x)$ jest ciągła.

W każdym punktcie nieciągłości x_0 funkcji $f(x)$ całka po prawej stronie wzoru jest równa $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$.

Jeśli $f(x)$ jest funkcją parzystą to $b(\omega) = 0$ oraz $a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt$,

Jeśli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą to $a(\omega) = 0$ oraz $b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt$.

Wykorzystując wzory Eulera, tożsamości trygonometryczne oraz to, że dla funkcji $h(x) = r(x) + ip(x)$ zmiennej rzeczywistej x mamy $\int_c^d h(x)dx = \int_c^d r(x) + i\int_c^d p(x)$, możemy równanie (1) zapisać w wygodnej postaci tzw. **zespolonego wzoru całkowego Fouriera**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega \tag{3}$$

W ostatnim wzorze,który przedstawia funkcję $f(x)$ za pomocą iterowanej całki niewłaściwej, całka niewłaściwa zewnętrzna po zmiennej ω jest częścią głowną całki. Część głowna $\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)d\omega$ to $\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} g(\omega)d\omega$.

Przykład 1
Napisać wzór całkowy Fouriera dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{gdy } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{gdy } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Przykład 2
Przedstawić funkcję $f(x) = e^{-x}$, gdy $x > 0$ za pomocą sinusowego wzoru całkowego Fouriera.

Przykład 3
Napisać zespolony wzór całkowy Fouriera dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{gdy } |x| < a \\ \frac{c}{2}, & \text{gdy } |x| = a \\ 0 & \text{gdy } |x| > a. \end{cases}$$

Wykorzystując ten wzór uzasadnić, że $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

1.2 Transformata Fouriera

Definicja 1.2
Niech funkcja $f(x)$ spełnia założenia twierdzenia 1. Funkcję

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in (-\infty, \infty)$$

nazywamy **transformatą Fouriera funkcji f(x)**.

Przykład 4
Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji

$$a) \;\; f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in [0,1] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

$$b) \;\; f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$c) \;\; f(x) = e^{-c|x|}, \; x \in R, \quad c > 0.$$

$$d) \;\; f(x) = e^{-x^2}, \; x \in R$$

Zauważmy, że na podstawie wzoru (3) mamy parę przekształceń

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)d\omega \qquad (4)$$

Te przekształcenia całkowe ustanawiają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między funkcjami $f(x)$ i $\hat{f}(\omega)$. Dlatego też przyjmijmy oznaczenia
$\hat{f}(\omega) = F[f(x)], \qquad f(x) = F^{-1}[\hat{f}(\omega)]$.
Funkcję $f(x)$ nazywamy też **transformatą odwrotną Fouriera funkcji** $\hat{f}(\omega)$**.**

Funkcję $\hat{f}(\omega)$ nazywamy **widmem** (charakterystyką widmową) funkcji $f(x)$. Ponadto jeśli $\hat{f}(\omega)$ zapiszemy w postaci

$$\hat{f}(\omega) = \left|\hat{f}(\omega)\right| e^{i\theta(\omega)}, \qquad \theta(\omega) \in [-\pi, \pi]$$

to $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ nazywamy **widmem amplitudowym** funkcji $f(x)$,
a $\theta(\omega)$ nazywamy **widmem fazowym** funkcji $f(x)$.

Widmo amplitudowe jest funkcją parzystą zmiennej ω, $\omega \in R$..
Ponadto gdy mamy
$\hat{f}(\omega) = \pi(a(\omega) - ib(\omega))$ to $\left|\hat{f}(\omega)\right| = \pi\sqrt{a^2(\omega) + b^2\omega)}$.

Widmo fazowe jest okresowe i gdy $\left|\hat{f}(\omega)\right| > 0$ to

$$\cos(\theta(\omega)) = \frac{\pi a(\omega)}{\left|\hat{f}(\omega)\right|} \quad oraz \quad \sin(\theta(\omega)) = \frac{-\pi b(\omega)}{\left|\hat{f}(\omega)\right|}.$$

Widmo fazowe jest nieparzystą funkcją zmiennej ω.
Dla $\cos(\theta(\omega)) = -1$ oraz $\sin(\theta(\omega)) = 0$ przyjmujemy $\theta(\omega) = \pi \cdot sgn(\omega)$.

Przykład 5
Znaleźć i narysować widmo amplitudowe oraz widmo fazowe dla funkcji opisanej w przykładzie 4b).

1.3. Własności transformaty Fouriera

Twierdzenie 2
Jeśli funkcje $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$ spełniają założenia twierdzenia 1, c_1, c_2 są dowolnymi liczbami to

$$F[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 F[f_1(x)] + c_2 F[f_2(x)].$$

Twierdzenie 3
Jeśli funkcja $f(x)$, spełnia założenia twierdzenia 1 oraz $x_0 \in R$ to

$$F[f(x-x_0)] = e^{-i\omega x_0}F[f(x)],$$

$$F[f(ax)] = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), a > 0.$$

Przykład 6
Wyznaczyć transformaty Fouriera podanych funkcji, wykorzystując twierdzenia o własnosciach transformat:

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} 2+3\cos x, & \text{gdy } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{gdy } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) = e^{-2|x+4|},\ x \in R.$$

Twierdzenie 4
Jeśli funkcja $x^n f(x)$, $n \in N$ spełnia założenia twierdzenia 1
oraz $F[f(x)] = \hat{f}(\omega)$ to

$$\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{f}(\omega) = (-i)^k F[x^k f(x)], \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Twierdzenie 5
Jeśli funkcja $f(x)$ i jej pochodne $f^{(n)}(x)$ $\quad k = 1, 2, \ldots, n$ spełniają założenia twierdzenia 1, są funkcjami ciągłymi
oraz $\lim_{x\to-\infty} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ to

$$F[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n F[f(x)].$$

Przykład 7
Wyznaczyć transformaty Fouriera podanych funkcji, wykorzystując twierdzenia o własnosciach transformat oraz tabelę transformat:

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } |x| < 2 \\ 1, & \text{gdy } |x| = 2 \\ 0, & \text{gdy } |x| > 2. \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$c)\quad f(x) = \begin{cases} x^n e^{-x}, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$d)\quad f(x) = 2xe^{-x^2},\ x \in R$$

$$e)\quad f(x)=\begin{cases} 1-|x-2|, & \text{gdy } |x-2|<1 \\ 0, & \text{gdy } |x-2|>1. \end{cases}$$

$$f)\quad f^{(5)}(x),\quad \text{gdy } f(x)=xe^{-x}, x>0$$

$$g)\quad f^{(3)}(x),\quad \text{gdy } f(x)=e^{-4x^2}$$

Tabela transformat Fouriera niektórych funkcji

$f(x)$	$f(\hat{\omega})$
$\begin{cases} 1, & \text{gdy } \lvert x\rvert<a \\ 0 & \text{gdy } \lvert x\rvert>a. \end{cases}$	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
$\begin{cases} 1, & \text{gdy } 0<x<1 \\ 0, & \text{poza} \end{cases}$	$\frac{sin\omega}{\omega}+\frac{i}{\omega}(\cos\omega-1)$
$\begin{cases} 1-\lvert x\rvert, & \text{gdy } \lvert x\rvert<1 \\ 0, & \text{gdy } \lvert x\rvert>1 \end{cases}$	$\frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)$
$e^{-cx},\quad x>0,\ c>0$	$\frac{1}{i\omega+c}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$\frac{2c}{\omega^2+c^2}$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}e^{\frac{-\omega^2}{4}}$
$\cos x,\quad \lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\pi e^{-\lvert\omega\rvert}$
$\delta(x)$	1

Przykład 8
Wyznaczyć funkcję $f(x)$, jeśli jej transformata Fouriera $f(\hat{\omega})$ ma postać

$$a)\quad f(\hat{\omega}) = \frac{3}{25+\omega^2}$$

$$b)\quad f(\hat{\omega}) = \frac{4}{1+2i\omega}$$

$$c)\quad f(\hat{\omega}) = \frac{4\sin 3\omega}{\omega}, \quad \omega \neq 0$$

$$d)\quad f(\hat{\omega}) = i\omega e^{\frac{-\omega^2}{16}}$$

1.4 Splot funkcji. Własności splotu.

Definicja 1.4
Splotem funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ całkowalnych bezwzględnie na R, w przedziale $(-\infty, \infty)$ nazywamy funkcję oznaczaną $f * g(x)$, określoną następująco

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Przykład 9
Wyznaczyć, z definicji, splot funkcji $f * g(x)$:

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{dla pozostałych }. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{gdy } x < 0, x > 1. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } -1 < x < 0 \\ 0, & x < -1, x > 0\ . \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & x < 0\ . \end{cases}$$

Dla funkcji ciągłych $f(x)$, $g(x)$ splot $f * g(x)$ ma własności:
a) $f * g(x) = g * f(x)$, (przemienność),
b) $(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$, (łączność)
c) $f * (g_1 + g_2)(x) = f * g_1(x) + f * g_2(x)$,(rozdzielność splotu względem dodawania).

O ważnych własnościach splotu, wykorzystywanych np. w wyznaczaniu transformaty Fouriera, mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6
Jeśli funkcje $f(x)$, $g(x)$ spełniają założenia tw.Fouriera to

$$F[f(x) * g(x)] = F[f(x)] \cdot F[g(x)].$$

oraz

$$F[f(x) \cdot g(x)] = F[f(x)] * F[g(x)].$$

Czyli transformata Fouriera splotu funkcji jest iloczynem transformat oraz transformata Fouriera iloczynu funkcji jest splotem ich transformat.

Przykład 10
Wykorzystując ostatnie twierdzenie wyznaczyć transformatę Fouriera $f * g(x)$, a następnie $f * g(x)$:

$$a) f(x) = g(x) = e^{-x^2}$$

$$b) f(x) = g(x) = \frac{1}{1 + 9x^2}$$

W opisach niektórych modeli fizycznych używa się 'pseudofunkcji' zwanej **deltą Diraca** $\delta(x)$ i określonej następująco:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \neq 0 \\ \infty & \text{gdy } x = 0. \end{cases} \qquad oraz \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

Nie jest to funkcja. Warunki (niepoprawne), które określają deltę Diraca wyrażają następujacą intuicję fizyczną: $\delta(x)$ reprezentuje nieskończenie wielki impuls pojawiający się w chwili $x = 0$ i trwający nieskończenie krótko, przy czym efekt działania impulsu, mierzony całką,jest równy jeden.
Teoria matematyczna, na gruncie której można wprowadzić deltę Diraca nazywa się teorią dystrybucji. Traktuje $\delta(x)$ jako granicę pewnych ciągów funkcji $(f_n(x))$.Jednym takich z ciągów jest np. $(f_n(x))$; gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |x| > \frac{1}{n} \\ n - n^2x, & \text{gdy } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ n + n^2x & \text{gdy } -\frac{1}{n} \leq x < 0. \end{cases}$$

Dla dowolnej funkcji $f(x)$ zachodzi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$.
Mamy zatem,że transformata Fouriera delty Diraca wynosi zatem 1, bo

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\delta(t)dt = 1$$

2. TRANSFORMATA LAPLACE'A

Transformata Laplace'a jest kolejnym przekształceniem całkowym wykorzystywanym w teorii obwodów elektrycznych.

Definicja 2.1
Niech $f(x)$ będzie określona dla $x \geq 0$. **Transformatą Laplace'a funkcji** $f(x)$ nazywamy funkcję $\bar{f}(s)$, $s \in R$ określoną następującą

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Stosuje się także zapis $L[f(x)] = \bar{f}(s)$. Zdefiniowane pojęcie można rozszerzyć dla $s \in C$.

Przykład 11
Wyznaczyć, z definicji, transformaty Laplace'a funkcji:

$$a) \text{ funkcji } Heaviside'a: \ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x > 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } x = 0 \\ 0, & \text{gdy } x < 0. \end{cases},$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \cos ax, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & x < 0\ . \end{cases} \qquad c) f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & x < 0\ . \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcje opisane w punkcie a), b) nie miały transformat Fouriera.

Naturalnym jest pytanie, dla któtych funkcji istnieje transformata Laplace'a. A oto warunki wystarczające.
Dla funkcji $f(x)$ spełniającej podane warunki:
1^o. $f(x) = 0$ dla $x < 0$,
2^o. $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta na każdym przedziale (a, b),$a, b \in R$,
3^o. $\exists_{M>0} \exists_{d>0} \forall_x |f(x)| < Me^{dx}$,
istnieje $\bar{f}(s)$, dla każdego $s > d$.

Funkcję spełniająca warunki $1^o - 3^o$ nazywa się **oryginałem**.

Fakt

Jeśli funkcje,będące oryginałami, mają takie same transformaty Laplace'a to są równe.

Transformata Laplace'a oryginału wyznacza oryginał w punktach ciągłości jednoznacznie. Przyporządkowanie $\bar{f}(s)$ funkcji $f(x)$ nazywa się transformatą odwrotną Laplace'a.

Twierdzenie 7

Jeśli funkcje $f(x)$, $g(x)$ mają transformaty Laplace'a to:

1. $L[af(x) + bg(x)] = aL[f(x)] + bL[g(x)]$.
2. $L[f(x - x_0)] = e^{-sx_0}\bar{f}(s)$.
3. $L[e^{-ax}f(x)] = \bar{f}(s + a)$.

Twierdzenie 8

Jeśli $f(x)$ jest oryginałem to $L(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s)$.

Przykład 12

Wyznaczyć transformaty Laplace'a podanych funkcji:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}, \qquad b) f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & x < 0\ . \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \sin(2x + \frac{\pi}{3}), & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & x < 0\ . \end{cases},$$

$$d) f(x) = \cos^2 x,\ x > 0, \qquad e) f(x) = \sin x \cos x,\ x > 0$$

Tabela transformat Laplace'a niektórych funkcji,$f(x) = 0$ dla $x < 0$

$f(x)$	$f(\bar{s})$
1	$\frac{1}{s}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{ax}\cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

Przykład 13
Wyznaczyć funkcję ciągłą, której transformata Laplace'a podana jest wzorem:

$$a)\bar{f}(s) = \frac{1}{s^2+25}, \quad b)\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2+4},$$
$$c)\bar{f}(s) = \frac{1}{s^2-s-2}, \quad d)\bar{f}(s) = e^{-4s}\frac{1}{s^4}$$

Twierdzenie 9
Jeśli $f(x)$ oraz jej pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie są oryginałami oraz istnieje $f^{(n)}(x)$ i jest ciągła na $(0,\infty)$ to

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n\bar{f}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+).$$

W szczególności dla n=1 mamy $L[f'(x)] = s\bar{f}(s) - f(0^+)$,
zaś dla n=2 mamy $L[f''(x)] = s^2\bar{f}(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$.

Transformatę Laplace'a i jej własności wykorzystujemy w rozwiązywaniu równań różniczkowych. Mówimy wtedy o metodzie operatorowej rozwiazywania równań.

Przykład 14
Wykorzystując transformatę Laplace'a wyznaczyć funkcję $y(x)$ spełniającą podane równania różniczkowe i warunki początkowe:
a) $y' + y = e^x, \quad y(0) = \frac{1}{2}$
b) $y'' + 6y = \cos 3x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$