Analiza dla informatyków 1 DANI LI1
Paweł Domański — szkicowe notatki do wykładu

Wykład 1

1. Cele nauczania analizy dla informnatyków

Moim zdaniem są trzy powody, dla których uczymy informatyków analizy matematycznej:

- matematyzacja wiedzy oznaczająca wyrażanie tej wiedzy w języku matematyki, budowanie modeli matematycznych opisujących (w przybliżeniu) zjawiska świata rzeczywistego - jako konsekwencja: np. w USA prawie wszystkie kierunki studiów mają obowiązkowy "Calculus";
- metody numeryczne jako jedno z głównych zastosowań informatyki i ważna część informatyki (obliczenia inżynierskie, naukowe, ekonomiczne itp.);
- metoda dedukcyjna w matematyce jako doskonałe przygotowanie do tworzenia algorytmów (w istocie poprawny algorytm może być dowodem istnienia jakiegoś obiektu, a poprawny dowód może byc algorytmem konstrukcji obiektu).

2. Modele matematyczne

Chodzi o opis uproszczonej sytuacji rzeczywistej w celu przewidywania jej rozwoju, zaplanowania strategii działania, symulowania rzeczywistego przebiegu zdarzeń (np., gdy doświadczenie jest zbyt drogie lub niemożliwe do przeprowadzenia) itp.

Pojęcie modelu matematycznego najlepiej wyjaśnić na przykładzie - patrz plik "model_verhulsta_w1.nb" opisujący tzw. model Verhulsta wzrostu populacji konkurującej o ograniczone zasoby.

3. Pojęcie funkcji Podamy teraz dwie “definicje” funkcji:

Definicja 1. Niech X, Y będą zbiorami niepustymi. Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy *przyporządkowanie* każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$.

Definicja 2. Funkcją f określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y to zbiór par uporządkowanych (x, y) takich, że

- $x \in X$, $y \in Y$;
- $\forall\, x \in X \ \exists\, y \in Y \quad (x, y) \in f$;
- $((x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2)$.

Definicja 1 jest znakomitą definicja - łatwą do zrozumienia tylko ma pewna wadę: co znaczy “przyporządkować” - dlatego matematycy używaja definicji 2. Tej z koli definicji nic nie można zarzucić (jesli wiemy, że para uporządkowana to $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$) ale ma poważna wadę: definicja ta jest bez długich wyjasnień całkowicie niezrozumiała. Warunek drugi w tej definicji oznacza, że każdemu argumentowi przyporządkowany jest jakiś y, a nastepny warunke oznacza, że tylko jeden.

Morał: Nie można mieć na raz wszystkiego - absolutnie jasnego wykładu i absolutnie ścisłego wykładu.

Terminologia i oznaczenia:

- $f : X \to Y$ funkcja f określona na zbiorze X i o wartościach w zbiorze Y (*ale nie wszystkie wartości w Y muszą być osiągnięte*);
- X dziedzina funkcji;
- Y przeciwdziedzina funkcji;
- $f(x)$ wartość funkcji w punkcie x, x to argument funkcji;
- $\{y \in Y : \ \exists\, x \in X, y = f(x)\}$ obraz funkcji f, oznaczany także $f(X)$ (*zwykle podzbiór właściwy Y*);
- funkcja różnowartościowa = injekcja = odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne (?) = "1−1 odwzorowanie": jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$;
- funkcja na = surjekcja:

$$\forall\, y \in Y \ \exists\, x \in X \quad f(x) = y;$$

- bijekcja = injekcja + surjekcja;
- obraz zbioru $A \subset X$

$$f(A) := \{y \in Y : \ \exists\, x \in A \quad f(x) = y\};$$

- przeciwobraz zbioru $B \subset Y$:

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\};$$

- złożenie funkcji $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$:

$$g \circ f(x) := g(f(x));$$

- wykres funkcji $f : X \to Y$ oznaczamy $G(f)$:

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

(*w sensie ścisłej definicji wykres to funkcja*).

Przykład 1 *Określmy funkcję kwadratową:*

$$f_1(x) := x^2, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = x^2.$$

To jeszcze nie jest definicja funkcji - trzeba podać dziedzinę i przeciwdziedzinę:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty), \qquad f_3 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Zatem funkcje f_1, f_2 i f_3 są parami **różne**.

Przykład 2 *a) f_3 jest różnowartościowa, f_1 nie jest injekcją;*

b) f_2 jest surjekcją, f_1 nie jest na;

c) f_j nie są bijekcjami;

d) $f_1([-1, 1)) = [0, 1]$;

e) $f_1^{-1}((-1, 1)) = (-1, 1)$;

f) $f_2^{-1}((-1, 1))$ nie istnieje bo $(-1, 1)$ nie jest podzbiorem przeciwdziedziny funkcji f_2;

g) $f_3^{-1}((-1, 1)) = [0, 1]$;

h) $f_1 \circ f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1 \circ f_1(x^2) = x^4$;

i) $f_3 \circ f_1$ nie jest zdefiniowane bo dziedzina f_3 jest różna od dziedziny f_1.

Będziemy głównie posługiwali sie funkcjami, których dziedzina i przeciwdziedzinia to zbiory liczb lub wektorów (tj. ciągów n liczb). Czyli przyporządkowaniami obiektów, które mogą być interpretowane jako liczby lub ich ciągi. Takich funkcji poznali Państwo mnóstwo w szkole: funkcje liniowe, afiniczne, kwadratowe, wielomianowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne, (a przynajmniej powinni Państwo je poznać). Badanie własności takich funkcji jest celem analizy matematycznej:

- przybliżanie funkcji funkcjami prostszymi;
- znajdywanie ich punktów charakterystycznych (miejsca zerowe, ekstrema itp.);
- badanie monotoniczności, największych wartości itp.

Teraz chcielibyśmy zobaczyć funkcję: njalepiej zrobic wykres w formie graficznej — patrz plik "wykres_funkcji_w1.nb".

Niestety wykresy funkcji robione komputerowo zawieraja pewne pułapki — nie wystarczy kliknąć i byc pewny wyniku. Patrz plik "pulapki_wykresow_w1.nb"

4. Liczby naturalne, całkowite i wymierne i dlaczego to nie wystarcza

Ponieważ będziemy posługiwać sie liczbami jako argumentami i wartościami funkcji więc warto przypomnieć co nieco na ten temat.

Liczby naturalne:

$$0, 1, 1, 2, 3, \ldots \qquad \mathbb{N}$$

Liczby całkowite:

$$\ldots, -100, -99, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 99, 100, 101, \ldots \qquad \mathbb{Z}$$

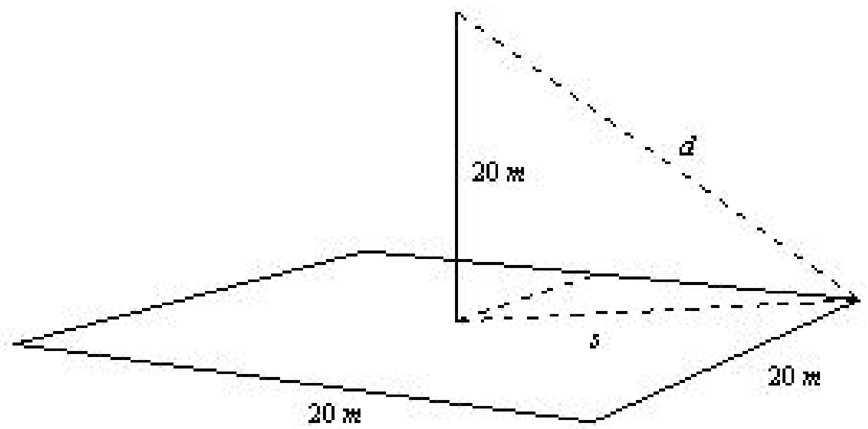
Liczby wymierne: liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q sa liczbami całkowitymi - istnieje nieskończenie wiele różnych reprezentacji tej samej liczby, wybiera sie zwykle tę, dla której p i q są względnie pierwsze i q jest dodatnie.

Matematycy zwykle nie definiują w ścisłym sensie liczb naturalnych (— są to dla nich pewne zbiory), ale definiują z nich liczby całkowite i liczby wymierne np. liczby wymierne dodatnie to zbiory par liczb naturalnych (p, q), $q \neq 0$, utożsamianych

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1.$$

Czyli precyzyjnie mówiąc zbiory klas abstrakcji zbioru par (p, q) względem relacji $\sim$. Taka dziwaczna definicja jest potrzebna aby miec pewność, że nie robimy błędu ale to sprawdzenie już zrobiono więc mogą Państwo swobodnie posługiwać się swoją intuicją liczby wymiernej.

Problem 3 *Na prostokątnej działce o wymiarach* 20×20 *metrów operator sieci komórkowej chce postawić maszt wysokości 20 metrów. w celu ustabilizowania masztu trzeba założyć 4 odciągi od szczytu masztu do rogów działki. Znajdź długość odciągu.*



Trzeba znaleźć wartość d. Z twierdzenia Pitagorasa:

$$d^2 = 20^2 + s^2, \qquad s^2 = \left(\frac{20}{2}\right)^2 + \left(\frac{20}{2}\right)^2$$

czyli

$$d^2 = 20^2 + 10^2 + 10^2 = 600, \qquad d = 10\sqrt{6}.$$

Czy istnieje liczba $\sqrt{6}$ tj. taka liczba x, że $x^2 = 6$?

Szukamy liczby $x = \frac{p}{q}$, p, q względnie pierwsze tj. nie mające wspólnych dzielników różnych od 1 lub -1.

Załóżmy, że jest taka liczba wymierna: $\frac{p}{q} = \sqrt{6}$, tj. $\frac{p^2}{q^2} = 6$, tj. $p^2 = 6q^2$.

Oczywiście możemy p i q rozłożyć na czynniki pierwsze:

$$p = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{\alpha_m}, \qquad q = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \cdots \cdot q_n^{\beta_n}.$$

zatem

$$p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{2\alpha_m} = 2 \cdot 3 \cdot q_1^{2\beta_1} \cdot q_2^{2\beta_2} \cdot \cdots \cdot q_n^{2\beta_n}.$$

Po lewej stronie liczba dwójek w rozkładzie jest parzysta a po prawej nieparzysta; sprzeczność z założeniem, że $\sqrt{6}$ jest wymierna. □

Z powyższego przykładu widać, że potrzebujemy coś więcej niż liczby wymierne — potrzebne sa liczby rzeczywiste. Trzeba by je skonstruować, ale konstrukcja jest trudna (zarówno przez ciągi Cauchy'ego jak przez przekroje Dedekinda) dlatego wprowadzimy na razie liczby rzeczywiste tzw. metodą aksjomatyczną tj. podamy własności tego obiektu — matematycy udowodnili, że taki obiekt "jest dokładnie jeden" więc istnieje (konstrukcja) i nie ma ich dwóch (dowód).

Tablica 1.2

Aksjomaty liczb rzeczywistych

I Aksjomaty dodawania

Określone jest działanie $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dodawania:

(1) $x + y = y + x$ — *przemienność dodawania*

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ — *łączność dodawania*

(3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 0 = x$ — *istnienie elementu neutralnego dodawania, istnienie zera*

(4) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R}: \quad x + y = 0$ — *istnienie elementu przeciwnego*

II Aksjomaty mnożenia

Określone jest działanie $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mnożenia:

(5) $x \cdot y = y \cdot x$ — *przemienność mnożenia*

(6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — *łączność mnożenia*

(7) $\exists\, 1 \neq 0 \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x \cdot 1 = x$ — *istnienie elementu neutralnego mnożenia, istnienie jedynki*

(8) $\forall\, x \neq 0 \in \mathbb{R}\ \exists\, y: \quad x \cdot y = 1$ — *istnienie elementu odwrotnego*

(9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ — *rozdzielność mnożenia względem dodawania*

III Aksjomaty porządku

Określona jest relacja $\leq \quad (\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ porządku:

(10) $x \leq x$ — *zwrotność*

(11) jeśli $x \leq y$ i $y \leq x$, to $x = y$ — *słaba antysymetria*

(12) jeśli $x \leq y$ i $y \leq z$, to $x \leq z$ — *przechodniość*

(13) $x \leq y$ lub $y \leq x$ — *spójność*

(14) jeśli $x \leq y$, to $x + z \leq y + z$

(15) jeśli $0 \leq x$ i $0 \leq y$, to $0 \leq x \cdot y$

IV Aksjomat kresu górnego

(16) Każdy niepusty ograniczony z góry podzbiór w $\mathbb{R}$ ma kres górny.

Dział I i II definiuje tzw. ciało, działy I, II, III tzw. ciało uporządkowane. Kluczowy jest aksjomat (16) – on dopiero odróżnia liczby rzeczywiste od wymiernych.

Definicja 4 *Kresem górnym zbioru A jest jego najmniejsze ograniczenie górne. Oznaczamy je* $\sup A$

Przykład 5

$$\sup(0,1) = 1, \qquad \sup\{0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots\} = 1.$$

Wykorzystanie zasady kresu górnego:

Wniosek 6 *(Zasada Archimedesa) Jesli $x > 0$, y dowolna liczba rzeczywista, to istnieje liczba całkowita $n \in \mathbb{Z}$ taka, że*

$$(n-1)x \leq y < nx.$$

Dowód: Nie wprost. Załóżmy, że

$$\forall\, p \in \mathbb{Z} \quad px \leq y$$

Zatem zbiór

$$A := \{px : p \in \mathbb{Z}\}$$

jest zbiorem ograniczonym przez y. Istnieje więc kres górny $\xi = \sup A$.

Ponieważ $0 < x$ więc $\xi < \xi + x$ zatem $\xi - x < \xi$. Stąd $\xi - x$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A:

$$\exists\, p \in \mathbb{Z} \quad \xi - x < px$$

czyli

$$\xi < px + x = (p+1)x$$

więc ξ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A bo $(p+1)x$ należy do A; sprzeczność. Pokazaliśmy, że

$$\exists\, p \in \mathbb{Z} \quad y < px.$$

Analogicznie

$$\exists\, q \in \mathbb{Z} \quad -y < qx.$$

Zatem
$$y > (-q)x$$
Ostatecznie
$$(-q)x < y < px$$
czyli y musi należec do jednego z przedziałów

$$[(-q)x, (-q+1)x), [(-q+1)x, (-q+2)x), \ldots, [(p-2)x, (p-1)x), [(p-1)x, px).$$

$\square$

Wniosek 7 *(Twierdzenie Eudoksosa)*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N} \quad 0 < 1/n < \varepsilon.$$

Dowód: Z zasady Archimedesa: $\exists\ n : 1 < \varepsilon n$, zatem $1/n < \varepsilon$. $\square$

Wniosek 8 *(o gęstości liczb wymiernych)*

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}, a < b\ \exists\ r \in \mathbb{Q} : \quad a < r < b.$$

Dowód: Z tw. Eudoksosa, $\exists\ n : 0 < 1/n < b - a$ Z zasady Archimedesa

$$\exists\ m \quad \frac{m-1}{m} \leq a < \frac{m}{n}$$

Zatem
$$\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

$\square$