Analiza dla informatyków 1 DANI LI1
Paweł Domański — szkicowe notatki do wykładu

Wykład 2

1. Istnienie pierwiastków rzeczywistych

Możemy teraz pokazać, że w dziedzinie liczb rzeczywistych istnieją pierwiastki.

Twierdzenie 1 *Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $y > 0$ rzeczywista tak, że $y^n = x$. Oznaczamy ją:*

$$y = \sqrt[n]{x}.$$

Szkic dowodu: Definiujemy $y := \sup E, \qquad E := \{t > 0, \quad t^n \leq x\}$.
Dowód zawiera trzy kroki:

- Dowód, że E jest ograniczony z góry (więc na mocy aksjomatu kresu górnego liczba y istnieje).
- Dowód, że gdyby $y^n < x$ to y nie byłoby ograniczeniem górnym E.
- Dowód, że gdyby $y^n > x$ to pewna liczba mniejsza od y też byłaby ograniczeniem górnym E.

Szczegóły dowodu w książce Sołtysiaka cz. I, str. 23.

2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

- Jeśli $r = \frac{m}{n}$ wymierna to $x^r := \sqrt[m]{x^n}$. Uwaga: definicja nie zależy od wyboru reprezentacji liczby r bo:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}, \qquad \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{x^n}.$$

- Jeśli r niewymierna $x > 1$, obie rzeczywiste,

$$x^r := \sup A, \qquad A := \{x^p : p \in \mathbb{Q}, p \leq r\}.$$

  Ponadto:

$$1^y := 1, \qquad x^y := \left(\frac{1}{x}\right)^{-p} \text{ dla } 0 < x < 1.$$

Zdefiniowaliśmy potęgę x^r gdzie x - podstawa, r - wykładnik.

3. Funkcja potęgowa

Zdefiniowaliśmy funkcję potęgową: $f(x) = x^r$, gdzie argumentem jest podstawa x a r jest ustaloną liczbą.

Dziedzina:

- r liczba naturalna: dziedziną jest cała prosta rzeczywista;
- r liczba całkowita ujemna: dziedziną jest prosta rzeczywsita bez zera;
- r liczba dodatnia rzeczywista niecałkowita: dziedziną jest półprosta dodatnia z zerem;
- r liczba ujemna rzeczywista niecałkowita: dziedzina jest półprosta dodatnia bez zera.

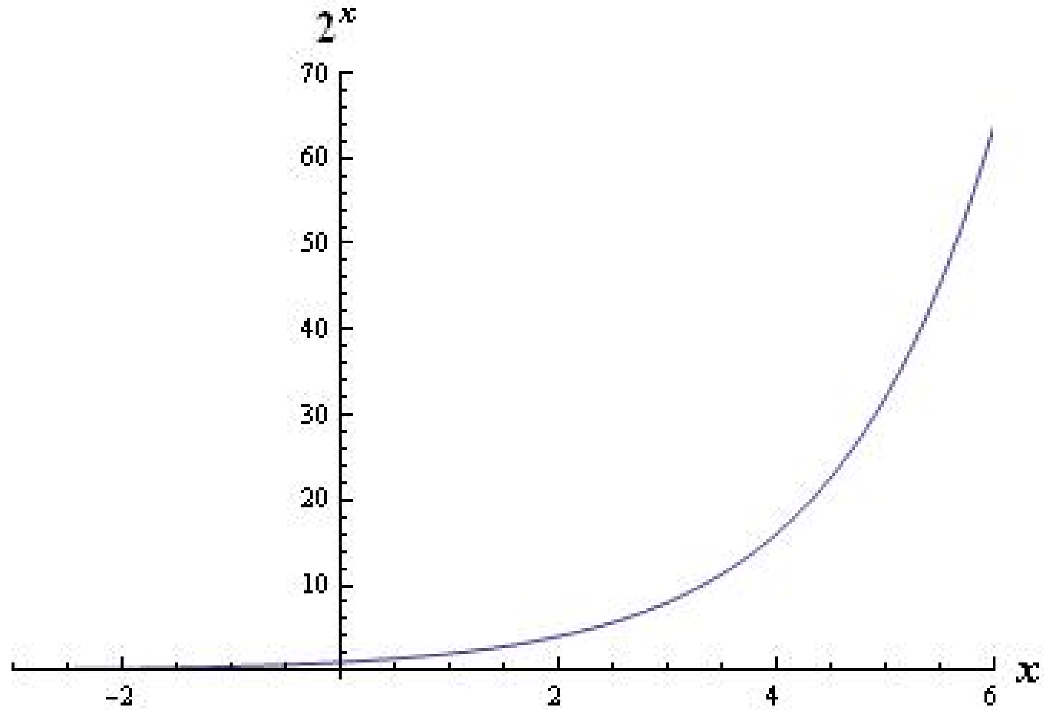
Funkcja ta jest rosnąca dla wszystkich wykładników dodatnich, stała dla wykładnika 0 i malejąca dla wykładników ujemnych.

Wykresy można zobaczyć na pliku: "funkcje_w2.nb"

4. Funkcja wykładnicza

Zdefiniowalismy też funkcję wykładniczą: $f(x) = a^x$, $a > 0$, gdzie argumentem jest wykładnik a podstawa jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Dziedzina tej funkcji jest cała prosta rzeczywista i jest ona rosnaca dla $a > 1$, stała da $a = 1$ i malejąca dla $a < 1$.

Poniżej wykres dla $a = 2$.



Więcej wykresów jest w pliku: "funkcje_w2.nb"

Tablica 2.1

Własności funkcji potęgowej i wykładniczej

Niech $x > 0$, y, z — liczby rzeczywiste.

(1) $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$

(2) $(x^y)^z = x^{y \cdot z}$

(3) $(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$

(4) jeśli $y < z$, to $x^y < x^z$ dla $x > 1$ i $x^y > x^z$ dla $0 < x < 1$

(5) jeśli $0 < x < y$, to $x^z < y^z$ dla $z > 0$ i $x^z > y^z$ dla $z < 0$

Funkcja wykładnicza służy do modelowania zjawisk, gdzie w jednostce czasu następuje zwielokrotnienie wielkośći (np. co stały odcinek czasu podwojenie wielkości lub zmniejszenie wielkości o połowę)

Przykłady:

- wzrost z nieograniczonymi zasobami ("wzrost malthuzjański"), zwykle po pewnym czasie musi nastapić zahamowanie. Gdy wzrost następuje z ograniczonymi zasobami lepszym modelem jest tzw. funkcja logistyczna:
$$l(t) = \frac{a}{1 + b2^{-ct}}$$
gdzie a, b, c sa parametrami procesu. Zwykle też liczba 2 w mianowniku zastapiona jest liczbą e. Wykres w pliku: "funkcje_w2.nb"

- rozpad radioaktywny: izotopy radioaktywne mają tzw. czas połowicznego rozpadu tj. czas w którym połowa próbki zaniknie na skutek przekształcenia w inne izotopy z wytworzeniem promieniowania. Jeśli:
  - $t_{1/2}$ jest czasem połowicznego rozpadu;
  - N_0 jest początkowa liczba atomów izotopu;
  - t czas;
  - $N(t)$ liczba atomów po czasie t;

  Wówczas:
$$N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{t_{1/2}}}$$

- Datowanie metodą węgla C^{14}:
Metoda datowania znalezisk archeologicznych opracowana przez amerykańskiego fizyka Willarda Libby ok. 1950 roku. Idea jest prosta: cały węgiel na ziemi składa się z izotopów C^{12} i C^{13} (trwałych) i śladowych ilości nietrwałego izotopu C^{14} (jeden atom średnio na 10^{12} atomów). Izotop ten stale powstaje na skutek działania promieniowania kosmicznego na atomy azotu i wchodzi w skład atmosferycznego dwutlenku węgla. Rośliny żyjąc pochłaniają dwutlenek węgla (w tym zawierający węgiel C^{14}) więc w tkankach roślin proporcje izotopów są takie jak w powietrzu. W momencie śmierci rośliny proces ten zamiera - trwałe izotopy węgla pozostają a nietrwały izotop ulega powolnemu rozkładowi z czasem połowicznego rozpadu: 5730 ± 40 lat. Jeśli zmierzymy w próbce

organicznej proporcje węgla trwałego do nietrwałego to możemy ocenić wiek (obecnie metoda działa do ok. 60 tys lat wstecz przy czym dla ostatnich 6 tys. lat z dokładnościa ok. 16 lat).

Są oczywiście problemy: ilość izotopów nietrwałych okazała się być zmienna historycznie a także względem położenia na kuli ziemskiej.

- Inną funkcją podobną z kształtu do logistycznej jest tzw. krzywa Gompertza:

  $$g(x) = ca^{(b^x)}$$

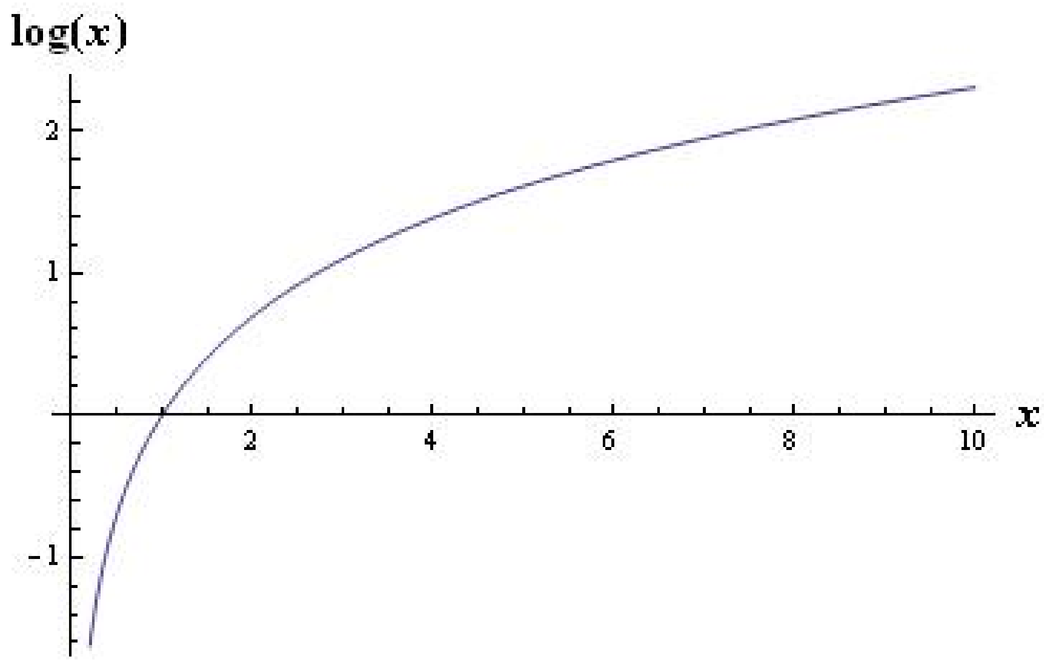
  Wykres w pliku: "funkcje_w2.nb".

5. Funkcja logarytmiczna

Powstaje pytanie czy istnieje funkcja odwrotna do wykładniczej. Odpowiedź jest $\boxed{\text{TAK}}$ o ile podstawa jest dodatnia różna od 1.

Twierdzenie 2 *Niech $b > 0$, $b \neq 1$, oraz $x > 0$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista y taka, że $x = b^y$. Liczbę y nazywamy logarytmem z x przy podstawie b.*

Oznaczenie: $\log_b x$



Funkcja logarytm jest rosnąca dla podstawy $b > 1$ i malejąca dla podstawy $b < 1$. Najważniejsze podstawy:

- $b = 10$ logarytm dziesiętny log;
- $b = e$ logarytm naturalny ln;
- $b = 2$ logarytm dwójkowy (o podstawie dwa), $\log_2$.

Ważne zastosowanie: jeśli chcemy obrazować funkcje f zmieniającą skale wielkości, np. w części dziedziny jest rzędu 1, w części rzędu 10, a w częśći rzędu 1000 wtedy lepiej robić wykres logarytmiczny tzn. wykres funkcji $\log f$ (złożenie). Jesli wartość f rośnie 10 razy to wartość $\log f$ rośnie tylko o 1!!

Przykład zastosowania skali logarytmicznej: miara hałasu - decybele wzrost wartości w decybelach o 10 oznacza dwukrotny wzrost hałasu.

Wykresy funkcji logarytmicznej i wykresy w skali logarytmicznej są w pliku: "funkcje_w2.nb"

Tablica 2.2

Własności funkcji logarytmicznej

Niech $x > 0$, $y > 0$, z dowolne, $a, b > 0$ — liczby rzeczywiste, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

(1) $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$

(2) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

(3) $\log_b x^z = z \cdot \log_b x$

(4) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$

6. Funkcje wymierne

a) funkcja liniowa f, $f(x) = ax$ lub afiniczna (!!) g, $g(x) = ax + b$:

Funckje te modelują procesy gdzie przyrost wielkości jest jednostajny w czasie np. położenie w ruchu jednostajnym, zysk w stabilnej firmie. Modele liniowe (wliczając w to afiniczne) są zwykle mało realistyczne, a przynjamniej realistyczne tylko w ograniczonym zakresie argumentu:

Przykład:

- prawo sprężystości Hooke'a: wydłużenie lub skrócenie pręta zależy liniowo od siły rozciągającej lub ściskającej — jeśli siła rozciągająca zbliży się do wartości granicznej (wytrzymałość pręta) to proces traci charakter liniowy a w końcu także ciągłość (zerwanie pręta).

b) funkcje wielomianowe: np. modele kwadratowe opisują zjawiska gdzie przyrost wielkości w jednostkach czasu rośnie jednostajnie (położenie w ruchu jednostajnie przyśpieszonym).

c) Funkcja wymierna to funkcja postaci:

$$f(x) := \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

Dziedziną jest prosta rzeczywista z usuniętymi pierwiastkami mianownika. Wykres takiej funkcji może wyglądać bardzo dziwnie. Patrz plik: "funkcje_w2.nb"

d) Szczególnie interesujące są funkcje wymierne gdzie mianownik i licznik są wielomianami stopnia 1 tj. funkcje homograficzne. Ich wykresem są hiperbole. Patrz plik: "funkcje_w2.nb"

Ogólna postać:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

e) Przekształcając mamy:

$$f(x) = \frac{ax + b}{c(x + d/c)} = \frac{(a/c)x + (b/c)}{x + (d/c)} = (a/c) + \frac{(b/c) - (ad/c^2)}{x + (d/c)}$$

czyli nowa postać ogólna:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x + \delta} + \beta$$

dla odpowiednio dobranych α, β, δ. Ta nowa postać pozwala łatwiej zrobić wykres i zrozumieć co się dzieje. Dziedziną jest prosta rzeczywista bez liczby $-\delta$, wzrost β powoduje wzrost wartości funckji w sposób liniowy. Zmiana δ powoduje przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX. W końcu zmiana α to mnożenie jednej komponenty. Patrz plik: "funkcje_w2.nb"

7. Funkcje trygonometryczne

Zakładam, że znają Państwo funkcje trygonometryczne kąta ostrego definiowane w trójkącie prostokątnym.

Bierzemy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 1. Wówczas sinus kąta ostrego w tym trójkącie to długość przyprostokątnej na przeciw kąta a cosinus to długość przyprostokątnej przy kącie.

W szkole mierzy sie kąt w stopniach więc mamy w ten sposób sinus i cosinus od 30 stopni, 45 stopni i np. 57,5 stopnia.

My będziemy się posługiwać miarą łukową kąta: miarą kąta jest długość łuku wyciętego przez ten kąt na okręgu o promieniu 1 i środku w wierzchołku kąta.

stopnie	miara łukowa
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
360°	2π

Miara łukowa jest wielkością niemianowaną (!!) bo formalnie jest stosunkiem łuku do promienia. Zatem dostajemy w ten sposób sinus, cosinus, tangens i cotangens liczb rzeczywsitych od 0 do $\pi/2$.

W pliku: "funkcje_w2.nb" jest dynamiczny rysunek wyjasniający definicję funkcji sinus dla dowolnych liczb: aby obliczyć wartość sinusa dla t należy poruszać się od punktu $(1, 0)$ na okręgu o środku $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara po drodze o długości t i znaleźć współrzędne (x, y) uzyskanego punktu. Wówczas

$$\sin t = y, \qquad \cos t = x$$

Funkcje tangens i cotangens definiuje sie jak niżej:

$$\operatorname{tg} t = \sin t/\cos t, \qquad \operatorname{ctg} t = \cos t/\sin t.$$

Wykresy znajdą Państwo w pliku: "funkcje_w2.nb" .

Własności funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej

(1) $\operatorname{tg} t$ jest zdefiniowany dla $t \neq k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$;

(2) $\operatorname{ctg} t$ jest zdefiniowany dla $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(3) sin i cos są funkcjami ograniczonymi z góry przez 1 a z dołu przez -1 2π-okresowymi tj. zmiana argumentu o wielokrotność 2π nie zmienia wartości funkcji;

(4) sin jest funkcją nieparzystą a cos funkcją parzystą;

(5) tg i ctg są funkcjami π-okresowymi nieograniczonymi i nieparzystymi.

(6) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, "wzór jedynkowy";

(7) $\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$;

(8) $\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$;

(9) $\cos t - \cos u = 2\sin\left(\frac{t+u}{2}\right)\sin\left(\frac{u-t}{2}\right)$;

(10) $\cos t + \cos u = 2\cos\left(\frac{t+u}{2}\right)\cos\left(\frac{t-u}{2}\right)$;

(11) $\sin t + \sin u = 2\sin\left(\frac{t+u}{2}\right)\cos\left(\frac{t-u}{2}\right)$.

(12) $\cos x = \sin(x + \pi/2)$;

(13) $\sin x = \sin(\pi - x)$, $\quad \sin x = -\sin(x+\pi)$, "wzory redukcyjne dla sinusa";

(13) $\cos x = -\cos(\pi - x)$, $\quad \cos x = -\cos(x+\pi)$, "wzory redukcyjne dla cosinusa";

8. Funkcje kołowe (odwrotne do trygonometrycznych

Ponieważ sin jest różnowartościowy na przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$ więc istnieje tu funkcja odwrotna arcusinus

$$\arcsin x, \qquad \arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

Podobnie istnieje funkcja odwrotna do cos zwana arcuscosinus

$$\arccos, \qquad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Funkcja odwrotna do tangensa zwana jest arcustangens

$$\mathrm{arctg}, \qquad \mathrm{arctg} : (-\infty, \infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$$

Funkcja odwrotna do cotangensa to arcuscotangens:

$$\mathrm{arcctg}, \qquad \mathrm{arcctg} : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$$

Wykresy znajdą Państwo w pliku: "funkcje_w2.nb"

9. Funkcje hiperboliczne

Sinus hiperboliczny:

$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$$

Cosinus hiperboliczny:

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$$

Tangens hiperboliczny:

$$\mathrm{tgh}\, x = \tanh x = \sinh x / \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangens hiperboliczny

$$\mathrm{ctgh}\, x = \cosh x / \sinh x = 1/\tanh x$$

Wykresy znajdą Państwo w pliku: "funkcje_w2.nb"

10. Oś rzeczywista

Liczby rzeczywiste mają interpretacje geometryczną jako punkty na prostej. Ustalając punkt odpowiadający zeru i punkt odpowiadający 1 (różny od zera) ustalamy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie punktów prostej na zbiór liczb rzeczywistych.

Rysunek!!

Wartośc bezwzględna liczb rzeczywistych

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0; \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

UWAGA: $\sqrt{x^2} = |x|$!!!!!!

Własności:

- $-|x| \leq x \leq |x|$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Odległość punktów na osi:

$$d(x, y) := |x - y|$$

Spełnia warunki:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

11. Rozszerzona oś rzeczywista

Wprowadza sie symbole $+\infty$ i $-\infty$, zbiór $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ to tzw. rozszerzony zbiór liczb rzeczywsitych. Zakłada się, że

$$\forall\ x \in \mathbb{R} : \quad -\infty < x < +\infty$$

Tablica 2.3

Działania na symbolach nieskończoność

(1) Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to

- $x + \infty = +\infty + x = +\infty$
- $x - \infty = -\infty + x = -\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

(2) Jeśli $x > 0$, to

- $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$
- $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$.

(3) Jeśli $x < 0$, to

- $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$
- $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$

(4) Działania niewykonalne to $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, itd.

12. Porównanie liczb rzeczywistych i maszynowych (arytmetyki zmiennoprzecinkowej komputera)

Liczby komputera dane są w postaci:

$$\varepsilon m b^w$$

gdzie zapisane w pamięci sa liczby ε, m, w oraz:

- ε - znak;
- m mantysa ustalonej długości;
- b baza arytmetyki, zwykle 2, 10 lub 16;
- w wykładnik tez ustalonej długości.

Zatem liczby komputerowe są dyskretne !!! i nie pokrywaja całej osi. Co więcej jest ich przy ustalonej arytmetyce skonczenie wiele. Odległość miedzy dwoma sasiednimi liczbami nazywa sie "ulp". dokonując obliczeń maszyna uzyskuje wynik który na ogół nie jest liczba maszynową więc musi byc zaokrąglona wg. pewnych reguł do jakiejs liczby maszynowej. Teoretycznie bład takiego zaokraglenia nie powinien być wiekszy niz 1/2 ulp ale w praktyce może sie kumulować.

Druga ważna sprawa: w liczbach maszynowych kolejność działań odgrywa rolę (inaczej niz w arytmetyce rzeczywistej).

Wiecej informacji w pliku: "arytmetyka_w2.nb"