Analiza dla informatyków 1 DANI LI1
Paweł Domański — szkicowe notatki do wykładu

Wykład 6

1. Szeregi o wyrazach nieujemnych

Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, gdzie $a_n \geq 0$ jest łatwiej badać gdyż ciąg sum częściowych jest niemalejący:

$$s_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} a_j = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \right) + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Zatem zbieżność szeregu jest równoważna ograniczoności ciągu sum częściowych a suma szeregu to kres górny zbioru wartości sum częściowych. Ten warunek jest nieczuły na przestawianie kolejności wyrazów!! Zatem

Wniosek 1 *Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny lub rozbieżny niezależnie od kolejności wyrazów i jego suma też nie zależy od kolejności wyrazów.*

Definicja 2 *Szereg jest bezwzględnie zbieżny wtedy gdy jest zbieżny szereg złożony z modułów jego wyrazów.*

Przykład:

- Szereg anharmoniczny jest zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny.
- Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}$ jest zarówno zbieżny jak i bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie 3 *Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny i suma nie zależy od kolejności wyrazów.*

Dowód pierwszej części: Wykorzystujemy warunek Cauchy'ego dla szeregów i nierówność:

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j|$$

$\square$

Teraz podamy kryteria zbieżności bezwzględnej, które też stanowia kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych.

Tablica 7.2

Kryteria bezwzględnej zbieżności szeregów

Kryterium porównawcze

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami zespolonymi. Jeśli dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_n| \leq b_n$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego

Dla danego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o wyrazach zespolonych oznaczmy $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wówczas:

(a) jeśli $\alpha < 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny;

(b) jeśli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Kryterium ilorazowe d'Alemberta

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach zespolonych niezerowych. Wówczas

(a) jest on bezwzględnie zbieżny, gdy

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1;$$

(b) jest on rozbieżny, gdy

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

Przykłady:

- Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$. Stosujemy kryterium ilorazowe:

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

  Szereg zbieżny.

- Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ badamy kryterium ilorazowym i pierwiastkowym i dostajemy granicę 1 , a więc te kryteria nie rozstrzygają.

Przykładowo udowodnimy kryterium ilorazowe:
Jeśli

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

to istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz dodatnie $q < 1$ takie, że dla $n \geq N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$$

zatem

$$|a_{N+k}| \leq q^k a_N$$

czyli z kryterium porównawczego szereg jest zbieżny bo szereg geometryczny $\sum_{k=0}^{\infty} q^k a_N$ jest zbieżny.

Jeśli z kolei

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

to istnieje $N \in \mathbb{N}$ i $q > 1$ takie, że dla $n > N$ zachodzi

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > q,$$

zatem

$$|a_{N+k}| \geq q^k a_N$$

czyli wyraz ogólny szeregu nie dąży do zera i szereg musi być rozbieżny. $\square$

2. Liczba e

Wyobraźmy sobie, że wkładamy do banku kapitał k na 1 rok z oprocentowaniem y procent, wówczas dla $z = y/100$ po roku mamy kapitał wraz z odsetkami:

$$k(1+z)$$

Jesli kapitalizacja następuje 12 razy w ciągu roku to po jednym roku otrzymamy:

$$k(1+z/12)^{12}$$

co jest liczbą trochę większą:

Np. dla $z = 0.1$, $k = 1000$

$$k(1+z) = 1100, \qquad k(1+z/12)^{12} = 1104,71$$

ale np. jeśli tę samą kwotę włożymy na 20 lat przy kapitalizacji rocznej mamy:

$$k(1+z)^{20} = 6727.5$$

przy kapitalizacji miesięcznej:

$$k(1+z/12)^{240} = 7328.07$$

przy kapitalizacji co dziennej:

$$k(1+z/365)^{7300} = 7387.03$$

Problem: (Bernoulli) Czy zwiększając częstotliwość kapitalizacji zwiększamy zysk w nieskończoność czy też istnieje jakaś granica tego procesu?

Innymi słowy czy istnieje granica ciągu:

$$k(1+z/n)^n$$

Wartość ta oznaczałaby "ciągłą" kapitalizację. Zbadajmy ciąg

$$w_n := (1+z/n)^n \qquad z > 0$$

Stosujemy wzór dwumianowy Newtona:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
w_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{z}{n} + \binom{n}{2}\frac{z^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{z^{n-1}}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{z^n}{n^n} = \\
&= 1 + z + \frac{z^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{z^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \\
&\cdots + \frac{z^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq \\
&\leq 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

Zatem jeśli s_n są sumami częściowymi szeregu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

to mamy:

$$w_n \leq s_n$$

Z drugiej strony dla $n \geq m$, m ustalone:

$$w_n \geq 1+z+\frac{z^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{z^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) := a_n$$

otrzymujemy:

$$\liminf w_n \geq \liminf a_n = \lim a_n = s_m$$

Wystarczy zatem zbadać szereg

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Zastosujemy kryterium ilorazowe:

$$\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1} \to 0$$

Szereg zbieżny.

Z powyższego mamy:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Definicja 4 *Wspólną wartość powyższych liczb dla $z = 1$ oznaczamy przez e i nazywamy podstawą logarytmu naturalnego.*

Weźmy teraz $z = \frac{p}{q} > 0$ wymierne. Wówczas:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{qn/p}\right)^{(qn/p)\cdot(p/q)}$$

Wyrywając podciąg po n podzielnych przez p (tj. $n = pm$) dostajemy

$$\left[\left(1 + \frac{1}{qm}\right)^{(qm)}\right]^{p/q} \to e^{p/q} \quad \text{dla } m \to \infty.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{p/q}$$

Weźmy dowolne $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, wówczas dla

$$s(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

mamy:

$$e^z = \inf\{s(p/q) : \quad p/q > z\} \geq s(z) \geq \sup\{s(p/q) : \quad p/q < z\} = e^z$$

czyli udowodniliśmy dla $z > 0$:

Twierdzenie 5

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \qquad \textit{dla } z \in \mathbb{R}$$

Przykład:

- Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Stosujemy kryterium ilorazowe:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

  Szereg zbieżny.

3. Szybkość zbieżności

Szeregi stosuje się do przybliżania różnych wielkości (np. wyliczania wartości różnych funkcji) — powyżej mieliśmy pierwszy taki przykład: przybliżanie wartości stałej e. Szeregi bardzo dobrze się do tego nadają: każde kolejne przybliżenie powstaje przez dodanie nowo wyliczonego wyrazu do poprzedniego przybliżenia (sumy częściowej). W każdym kroku wylicza się tylko "poprawkę".

Porównajmy: jesli liczymy liczbę e granicą ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ to wyliczenia poprzedniego wyrazu są bezużyteczne przy wyliczaniu następnego. Jeśli jednak wyliczamy e jako sumę szeregu $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}$ to każde kolejne przybliżenie, to kolejna suma częściowa $\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}$ i do wyliczenia następnej sumy wystarczy wykorzystać poprzednią sumę i dodać $\frac{1}{(n+1)!}$. Lepszy algorytm.

W praktyce ważne jest jak szybko szereg zbiega. Policzmy:

$$
\begin{aligned}
e - s_n = \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!} &\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n\cdot n!}
\end{aligned}
$$

czyli oszacowanie e przez n-tą sume częściową szeregu jest bardzo dobre! Dla $n=5$ błąd to $1/600$.

Porównanie szybkości zbieżności powyższego ciągu i szeregu dane jest w pliku: "liczba_e_w6.nb"

Wartość

$$e \approx 2.71828$$