

Transformata Fouriera

Krzysztof Patan

Aproksymacja sygnałów

- Aproksymacja sygnału $x(t)$ za pomocą rozwinięcia o skończonej długości polega na znalezieniu funkcji

$$\hat{x}_n(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_k x_k(t) + \dots + c_n x_n(t) \quad (*)$$

gdzie c_i – współczynniki rzeczywiste lub zespolone, $x_k(t)$ – funkcje, np. ortogonalne $\langle x_i(t), x_j(t) \rangle = 0$

- Miara błędu

$$\varepsilon = \|x(t) - \hat{x}_n(t)\|^2 = \|x(t) - \sum_{k=1}^n c_k x_k(t)\|^2$$

- Zadanie aproksymacji to poszukiwanie minimum miary błędu ε ze względu na dobór współczynników c_k
- W przestrzeni L^2 (całkowalnej z kwadratem) współczynniki przybierają postać:

$$c_k = \frac{\langle x(t), x_k(t) \rangle}{\|x_k(t)\|^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- Szereg aproksymujący (*) nosi nazwę szeregu Fouriera

Reprezentacja sygnału ciągłego – szereg Fouriera

Założmy, że $x(t)$ to sygnał okresowy

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$

Szukamy rozwinięcia w wykładniczy szereg Fouriera postaci

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi t/T}$$

gdzie

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – częstotliwość podstawowa

c_k – współczynniki rozwinięcia

T – okres sygnału

$k = 0, k = 1, k = 2, \dots$ – harmoniczne sygnału

Problem: Jak znaleźć współczynniki rozwinięcia?

Odpowiedź

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\text{pomnóż przez } e^{-jn\omega_0 t}} & x(t)e^{-jn\omega_0 t} \\ x(t)e^{-jn\omega_0 t} & \xrightarrow{\text{sczałkuj po całym okresie } T} & \int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \end{array}$$

czyli

$$\begin{aligned} \int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt &= \int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jn\omega_0 t} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right) \end{aligned}$$

zauważmy, że

$$\begin{aligned} \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt &= \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \\ &= T\delta[k - n] \end{aligned}$$

ostatecznie

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k T \delta[k - n]$$

jeśli przedstawimy to dla konkretnego współczynnika $k = n$ to

$$\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = c_k T \longrightarrow c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Szereg Fouriera dla sygnału ciągłego

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad - \text{synteza sygnału}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad - \text{analiza sygnału}$$

Postać trygonometryczna szeregu Fouriera

Wzory Eulera

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t})$$

$$\sin(k\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})$$

Po przekształceniach:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (\cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)) + c_k (\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + j b_k \sin(k\omega_0 t) \end{aligned}$$

gdzie $a_k = (c_k + c_{-k})$, $b_k = j(c_k - c_{-k})$

Przykład 1

$$x(t) = \cos(4\pi t) + 2 \sin(8\pi t)$$

po zastosowaniu wzorów Eulera

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t} \right) + \frac{2}{j2} \left(e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t} \right)$$

czyli

$$\omega_0 = 4\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2}$$

współczynniki

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{j}, \quad c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad c_{-2} = -\frac{1}{j}, \quad c_3 = 0, \quad c_{-3} = 0$$

Przykład 1

$$x(t) = \cos(4\pi t) + 2 \sin(8\pi t)$$

po zastosowaniu wzorów Eulera

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t} \right) + \frac{2}{j2} \left(e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t} \right)$$

czyli

$$\omega_0 = 4\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2}$$

współczynniki

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{j}, \quad c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad c_{-2} = -\frac{1}{j}, \quad c_3 = 0, \quad c_{-3} = 0$$

Charakterystyki szeregu Fouriera

- Szereg Fouriera jest przekształceniem, które przyporządkowuje ciągłemu sygnałowi okresowemu $x(t)$ sygnał dyskretny $\{c_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- Zespólny współczynnik c_k można przedstawić w postaci:

$$c_k = |c_k|e^{j\varphi_k}$$

- **Widmo amplitudowe:**

$$\text{zbiór } \{|c_k|, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

- **Widmo fazowe:**

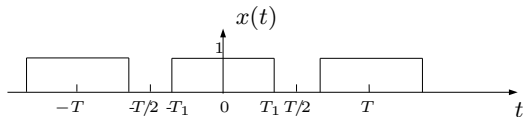
$$\text{zbiór } \{\varphi_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

- **Widmo dystrybucji mocy:**

$$\text{zbiór } \{|c_k|^2, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Przykład 2

Okresowa fala prostokątna



dla $k = 0$

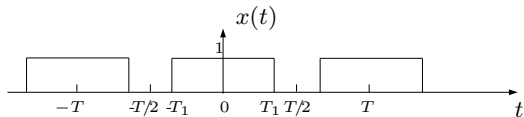
$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{2T_1}{T}$$

dla $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \end{aligned}$$

Przykład 2

Okresowa fala prostokątna



dla $k = 0$

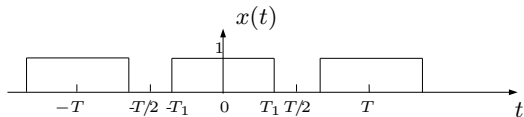
$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{2T_1}{T}$$

dla $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \end{aligned}$$

Przykład 2

Okresowa fala prostokątna



dla $k = 0$

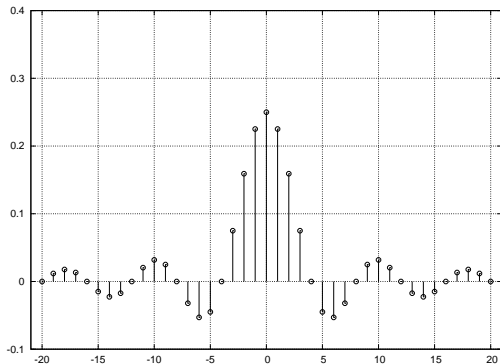
$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{2T_1}{T}$$

dla $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \end{aligned}$$

Przykład 2 – cd

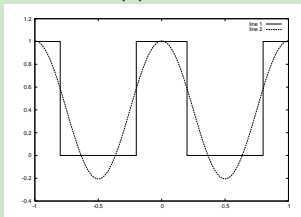
Widmo okresowej fali prostokątnej



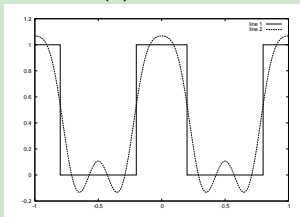
Efekt Gibbsa – okresowa fala prostokątna

wraz ze zwiększaniem liczby wyrazów maleje błąd aproksymacji, ale oscylacje wokół punktów nieciągłości pozostają stałe, zmienia się ich czas trwania

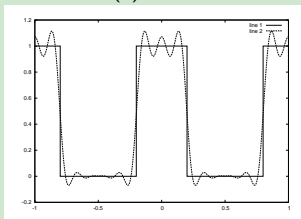
(a) $k = 1$



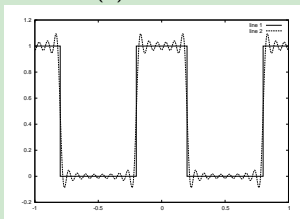
(b) $k = 3$



(c) $k = 7$



(d) $k = 15$



Zbieżność szeregu Fouriera

Funkcja $x(t)$ aproksymowana jest przez funkcję $\hat{x}(t)$ postaci

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (*)$$

błąd aproksymacji $e(t)$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

zadanie aproksymacji

$$\min_{c_k} \frac{1}{T} \int_T |e(t)|^2 dt$$

szereg aproksymacyjny (*) zapewnia minimum błędów w sensie energii lub mocy sygnału błędów

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |e(t)|^2 dt = 0$$

Warunki Dirichleta zbieżności szeregu Fouriera

- 1 funkcja $x(t)$ jest bezwzględnie całkowna na dowolnym przedziale o długości okresu T , tzn. $\int_T |x(t)| dt < \infty$
- 2 w każdym ograniczonym przedziale, $x(t)$ ma skończoną liczbę maksimum i minimum o skończonej wartości
- 3 w każdym ograniczonym przedziale, $x(t)$ ma skończoną liczbę nieciągłości

Jeżeli warunki Dirichleta są spełnione to sygnał okresowy $x(t)$ może być reprezentowany jako suma szeregu funkcji harmoniczych

Warunki Dirichleta są spełnione dla większości sygnałów spotykanych w rzeczywistości

Przykłady sygnałów dla których warunki Dirichleta nie są spełnione

- ❶ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \sin(2\pi/t) & \text{dla } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

funkcja nie spełnia drugiego warunku Dirichleta

- ❷ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \frac{1}{k} & \text{dla } t \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

funkcja nie spełnia trzeciego warunku Dirichleta

Przykłady sygnałów dla których warunki Dirichleta nie są spełnione

- ❶ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \sin(2\pi/t) & \text{dla } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

funkcja nie spełnia drugiego warunku Dirichleta

- ❷ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \frac{1}{k} & \text{dla } t \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

funkcja nie spełnia trzeciego warunku Dirichleta

Przykłady sygnałów dla których warunki Dirichleta nie są spełnione

- ❶ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \sin(2\pi/t) & \text{dla } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

funkcja nie spełnia drugiego warunku Dirichleta

- ❷ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \frac{1}{k} & \text{dla } t \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

funkcja nie spełnia trzeciego warunku Dirichleta

Przykłady sygnałów dla których warunki Dirichleta nie są spełnione

- ❶ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \sin(2\pi/t) & \text{dla } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

funkcja nie spełnia drugiego warunku Dirichleta

- ❷ Sygnał $x(t)$ o okresie $T_0 = 1$ zdefiniowany

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ \frac{1}{k} & \text{dla } t \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

funkcja nie spełnia trzeciego warunku Dirichleta

Właściwości szeregu Fouriera

- Liniowość:

$$x(t) \rightarrow a_k, y(t) \rightarrow b_k \Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$$

- Symetria

(i) jeśli $x(t)$ – funkcja rzeczywista i parzysta to c_k – rzeczywista i parzysta funkcja zmiennej k

(ii) jeśli $x(t)$ – funkcja rzeczywista i nieparzysta to c_k – urojona i nieparzysta funkcja zmiennej k

- Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$x(t) \leftrightarrow c_k$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow c_k e^{-jk\omega_0 t_0} = c_k e^{-jk2\pi t_0/T}$$

przesunięcie nie zmienia modułów współczynników, ale zmienia ich fazy o $k\omega_0 t_0$

Równość Parsewala

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt}_{\text{średnia moc sygnału}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|c_k|^2}_{\text{moc } k\text{-tej harmonicznej}}$$

- Moc sygnału obliczamy jako sumę kwadratów modułów współczynników rozwinięcia w szereg Fouriera
- Równość Parsewala dostarcza informacji o rozkładzie mocy sygnału w funkcji częstotliwości

Ćwiczenie. Obliczyć moc sygnału z przykładu 1

Reprezentacja sygnału dyskretnego – szereg Fouriera

$x[n]$ – sygnał okresowy z okresem N

$$x[n] = x[n + N] \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

za względu na okresowość: $e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$

wystarczy wziąć N sygnałów: $e^{j0\omega_0 n}, e^{j1\omega_0 n}, \dots, e^{j(N-1)\omega_0 n}$

czyli

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

gdzie

c_k – współczynniki rozwinięcia

$k = 0, k = 1, k = 2, \dots$ – harmoniczne sygnału

UWAGA: Szereg Fouriera dla sygnału dyskretnego jest skończony!

Problem: Jak znaleźć współczynniki rozwinięcia?

Odpowiedź

$$\begin{array}{ccc} x[n] & \xrightarrow{\text{pomnóż przez } e^{-jm\omega_0 n}} & x[n]e^{-jm\omega_0 n} \\ x[n]e^{-jm\omega_0 n} & \xrightarrow{\text{sumuj po } N \text{ kolejnych wyrazach}} & \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jm\omega_0 n} \end{array}$$

czyli

$$\begin{aligned} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jm\omega_0 n} &= \sum_{n=\langle N \rangle} \left(\sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk\omega_0 n} \right) e^{-jm\omega_0 n} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} c_k \underbrace{\left(\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-m)\omega_0 n} \right)}_{=N\delta[k-m]} \\ &= Nc_m \end{aligned}$$

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & \text{dla } a = 1 \\ \frac{1 - a^N}{1 - a} & \text{dla } a \neq 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie Pokazać, że

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jm\omega_0 n} = N c_m$$

Szereg Fouriera dla sygnału dyskretnego

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk\omega_0 n} \quad - \text{synteza sygnału}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \quad - \text{analiza sygnału}$$

Wygodnie jest rozważać współczynniki c_k tak jakby były zdefiniowane dla wszystkich liczb k :

- 1 $c_{k+N} = c_k$ – specjalna właściwość współczynników szeregu Fouriera (tylko dla sygnałów dyskretnych!)
- 2 używamy tylko N kolejnych wartości c_k ; $x[n]$ jest reprezentowane tylko przez N współczynników

Przykład 3

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\pi/8n} + e^{-j\pi/8n}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\pi/4n}e^{j\pi/4} + e^{-j\pi/4n}e^{j\pi/4}\right)$$

czyli

$$\omega_0 = \pi/8, \quad N = 16$$

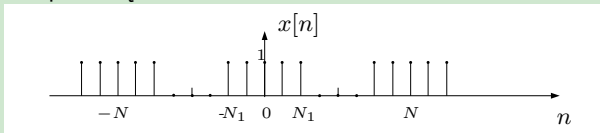
współczynniki

$$c_0=0, \quad c_1=\frac{1}{2}, \quad c_{-1}=\frac{1}{2}, \quad c_2=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}, \quad c_{-2}=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}, \quad c_3=0, \quad c_{-3}=0$$

$$c_{15} = c_{-1+16} = c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad a_{66} = c_{2+4\times 16} = c_2 = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$$

Przykład 4

Okresowa fala prostokątna



dla $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] = \frac{2N_1 + 1}{N}$$

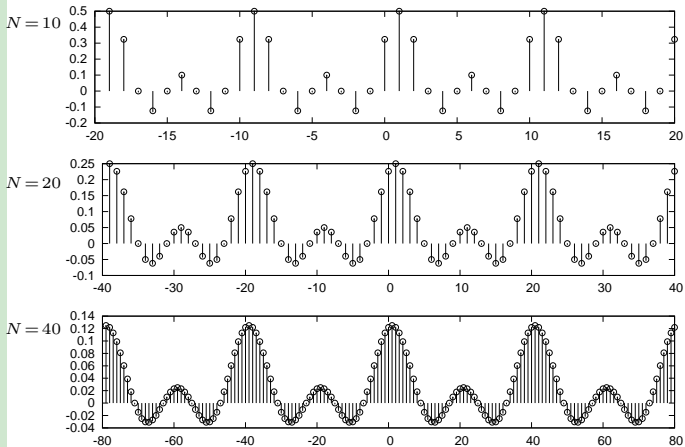
dla $k \neq$ wielokrotność N

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\omega_0 (m-N_1)} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\omega_0 N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} (e^{-jk\omega_0})^m = \frac{1}{N} e^{jk\omega_0 N_1} \frac{1 - e^{-jk\omega_0 (2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\omega_0}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin(k(N_1 + 1/2)\omega_0)}{\sin(k\omega_0/2)} = \frac{1}{N} \frac{\sin(2\pi k(N_1 + 1/2)/N)}{\sin(\pi k/N)} \end{aligned}$$

Uwaga: korzystamy z sumy szeregu geometrycznego

Przykład 4 – cd

Widmo fali prostokątnej – $N_1 = 2$



DEMO: [widmo.m](#)

Transformata Fouriera sygnałów ciągłych

Szeregi Fouriera stosuje się dla sygnałów okresowych

Problem: Co w przypadku, gdy $x(t)$ jest nieokresowy?

Sygnał nieokresowy można rozważać jako sygnał okresowy z okresem $T \rightarrow \infty$

Dla sygnału okresowego, harmoniczne są rozmieszczone co $\omega_0 = 2\pi/T$

Gdy $T \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0$ i harmoniczne są rozmieszczane coraz gęściej w dziedzinie częstotliwości

szereg Fouriera zastępujemy całką Fouriera

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

w rozważanym przedziale $\hat{x}(t) = x(t)$ więc

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

zdefiniujemy

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

wtedy

$$c_k = \frac{X(jk\omega_0)}{T}$$

dla $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$x(t) = \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} X(jk\omega_0)}_{c_k} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

kiedy $T \rightarrow \infty, \sum \omega_0 \rightarrow \int d\omega$

Transformata Fouriera dla sygnału ciągłego

- odwrotna transformata Fouriera – synteza sygnału

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- transformata Fouriera – analiza sygnału

$$X(j\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Transformatę Fouriera można stosować dla sygnałów:

- ① ze skończoną energią $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

jeżeli błąd $e(t) = x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

wtedy $\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt = 0$

- ② spełniających warunki Dirichleta

- $x(t)$ jest bezwzględnie całkowna na $t \in (-\infty, \infty)$
- $x(t)$ ma skończoną liczbę maksimum i minimum w każdym skończonym przedziale
- $x(t)$ ma skończoną liczbę nieciągłości o skończonej wartości w każdym skończonym przedziale
- $\hat{x}(t) = x(t)$ w punktach ciągłości sygnału $x(t)$
- $\hat{x}(t) = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$ w punktach nieciągłości sygnału $x(t)$

- ③ okresowych

Właściwości transformaty Fouriera dla sygnałów ciągłych

- Liniowość:

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

- Przesunięcie w dziedzinie czasu:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

przesunięcie nie zmienia modułów $X(j\omega)$, ale zmienia ich fazy o $k\omega t_0$

- Symetria:

jeśli $x(t)$ – funkcja rzeczywista to $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

$$|X(-j\omega)| = |X(j\omega)| \text{ – parzyste}$$

$$\angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega) \text{ – nieparzyste}$$

$$\operatorname{Re}|X(-j\omega)| = \operatorname{Re}|X(j\omega)| \text{ – parzyste}$$

$$\operatorname{Im}|X(-j\omega)| = -\operatorname{Im}|X(j\omega)| \text{ – nieparzyste}$$

- Zmiana skali czasu:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X \left(j \frac{\omega}{a} \right)$$

- $a > 0$ – sygnał "przyspiesza" w dziedzinie czasu \leftrightarrow jego widmo zostaje rozciągnięte, zwiększa się zawartość widma w zakresie większych częstotliwości
- $a < 0$ – sygnał "zwalnia" w dziedzinie czasu \leftrightarrow widmo zostaje ściśnięte, zwiększa się zawartość widma w zakresie małych częstotliwości

Przykład 5

Impuls jednostkowy

(a) $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$$

\Downarrow

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

(b) $x(t) = \delta(t - t_0)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

Przykład 6

Funkcja wykładnicza

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)t}} dt \\ &= -\left(\frac{1}{a+j\omega}\right) e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad - \text{funkcja parzysta}$$

$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad - \text{funkcja nieparzysta}$$

DEMO: f_wykl.m

Przykład 7

Impuls prostokątny

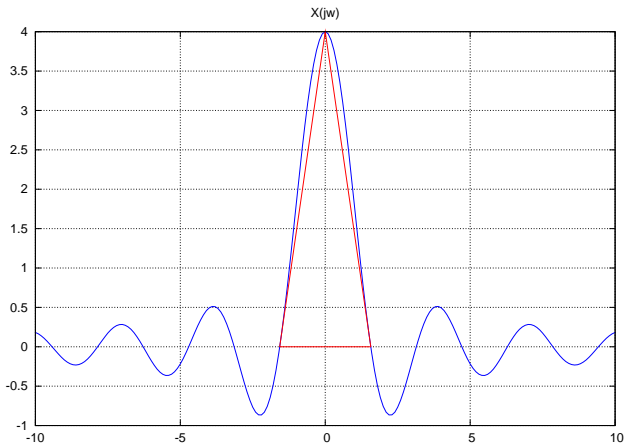
$$x(t) = 1 \quad \text{dla } t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$$

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \rightarrow X(0) = \int_{-T_1}^{T_1} x(t) dt = 2T_1$$

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega \rightarrow x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \times P_{\Delta} = 1$$

Przykład 7 – cd



DEMO: f_square.m

Przykład 8

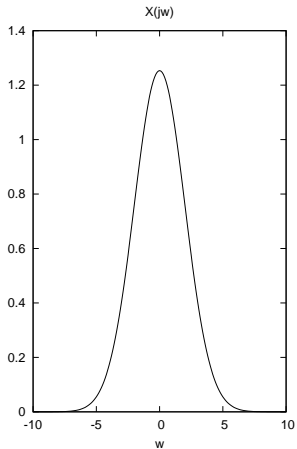
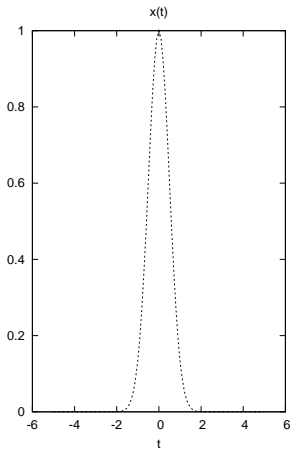
Funkcja Gaussa

$$x(t) = e^{-at^2}$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t^2 + j\frac{\omega}{a}t + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right) + a\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2} dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2} dt \right) e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \end{aligned}$$

$$X(j\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Przykład 8 – cd



DEMO: `f_gauss.m`

Transformata Fouriera sygnałów dyskretnych

$x[n]$ – sygnał nieokresowy o skończonej długości

N jest dostatecznie duże takie, że

$$x[n] = 0 \quad \text{jeśli} \quad |n| \geq \frac{N}{2}$$

$\hat{x}[n] = x[n]$ dla $|n| \leq \frac{N}{2}$ – okresowy z okresem N

czyli

$$\hat{x}[n] = x[n] \quad \forall n \quad \text{kiedy} \quad N \rightarrow \infty$$

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \hat{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=N_1}^{N_2} \hat{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \end{aligned}$$

zdefiniujmy

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{syg. okresowy z okresem } 2\pi$$

↓

$$c_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \underbrace{\frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})}_{c_k} e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} \omega_0 X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \quad (*)$$

gdym $N \rightarrow \infty$ to $\hat{x}[n] = x[n] \forall n$

gdym $\omega_0 \rightarrow 0$ to $\sum \omega_0 \rightarrow \int d\omega$ w równaniu (*)

Transformata Fouriera dla sygnału dyskretnego

- odwrotna transformata Fouriera – synteza sygnału

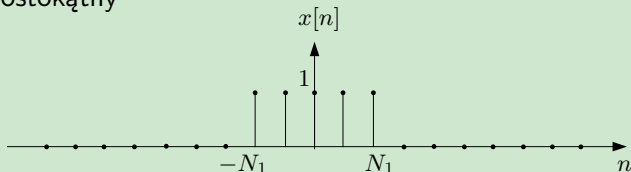
$$x[n] = \mathcal{F}_d^{-1}(X(e^{j\omega})) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- transformata Fouriera – analiza sygnału

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_d(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Przykład 9

Impuls prostokątny



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (e^{-j\omega})^n = \frac{\sin(\omega(N_1 + 1/2))}{\sin(\omega/2)}$$

DEMO: `square_pulse.m`

Uwaga! Transformata jest okresowa: $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-2\pi)})$

Właściwości transformaty Fouriera dla sygnałów dyskretnych

- ❶ Okresowość

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

- ❷ Liniowość

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

- ❸ Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

- ❹ Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

5 Inwersja czasu

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

6 Symetria

$$x[n] \text{ rzeczywisty} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

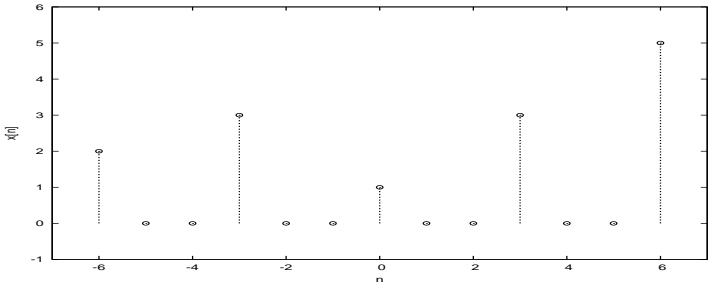
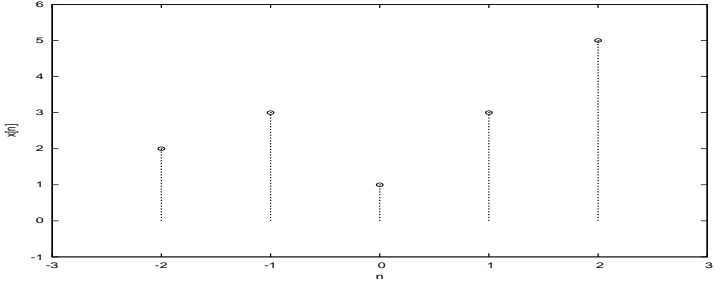
$|X(e^{j\omega})|$ i $Re(X(e^{j\omega}))$ są parzyste

$\angle X(e^{j\omega})$ i $Im(X(e^{j\omega}))$ są nieparzyste

7 Zmiana skali czasu

- $x[n/2]$ – nie ma sensu (chwile czasu to liczby całkowite!)
- $x[2n]$ – tracimy wartości dla nieparzystych chwil czasu $x[n]$

Można spowolnić sygnał wprowadzając zera w odpowiednich czwilach czasu



Dyskretna Transformata Fouriera

- Przekształcenie Fouriera dla sygnałów dyskretnych definiuje częstotliwościowy model nieskończonych ciągów dyskretnych
- W rzeczywistości czas obserwacji sygnału jest skończony – skończone ciągi
- Przekształcenie Fouriera dla sygnałów dyskretnych prowadzi do ciągłego widma częstotliwościowego sygnału
- Dyskretna Transformata Fouriera prowadzi do dyskretnego widma częstotliwościowego sygnału
- Dyskretna Transformata Fouriera pozwala na estymację widma sygnału ciągłego

$x[n]$ – ciąg o skończonej długości N

przekształcenie Fouriera

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_d(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

wprowadźmy dyskretyzację zmiennej ω

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

próbka w dziedzinie pulsacji

$$X_N[k] = \mathcal{D}_F(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jkn(2\pi/N)} \quad (*)$$

wyrażenie (*) nazywamy dyskretnym przekształceniem Fouriera
(ang. *Discrete Fourier Transform, DFT*)

Problem: Jak znaleźć przekształcenie odwrotne?

Dla transformaty Fouriera sygnałów dyskretnych otrzymaliśmy:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_0 X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} X(e^{jk2\pi/N}) e^{jkn2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{jkn2\pi/N}$$

Dyskretna Transformata Fouriera, DFT

- odwrotna transformata Fouriera – synteza sygnału

$$x[n] = \mathcal{D}_F^{-1}(X_N[k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{jkn2\pi/N}$$

- transformata Fouriera – analiza sygnału

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{D}_F(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jkn2\pi/N}$$

Szybkie przekształcenie Fouriera

- Szybkie przekształcenie Fouriera FFT (ang. *Fast Fourier Transform*) jest efektywną procedurą numeryczną do wyznaczenia DFT
- Cooley-Tukey FFT – najbardziej popularna procedura wyznaczania DFT (1965r.)
- Algorytm wyznacza transformatę Fouriera osobno dla parzystych próbek $x[2m]$, nieparzystych $x[2m + 1]$, a następnie łączy te wyniki w celu otrzymania transformaty Fouriera dla całej sekwencji
- Cały proces można przeprowadzić rekurencyjnie co skraca czas obliczeń
- Procedura zakłada N jako potęgę 2 – w praktyce ograniczenie z reguły nie sprawia problemów

$$\begin{aligned}
X_N[k] &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m]e^{-j2mk2\pi/N} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1]e^{-j(2m+1)k2\pi/N} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} x[2m]e^{-jmk2\pi/M} + e^{-jk2\pi/M} \sum_{m=0}^{M-1} x[2m+1]e^{-jmk2\pi/M} \\
&= \begin{cases} E_k + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} O_k & k < M \\ E_{k-M} - e^{-j\frac{2\pi(k-M)}{N}} O_{k-M} & k \geq M \end{cases}
\end{aligned}$$

gdzie

$$M = \frac{N}{2}$$

E_j – parzyste próbki $x[2m]$

O_j – nieparzyste próbki $x[2m+1]$

$m = 0, \dots, M-1, j = 0, \dots, M-1$

Przykład 10, DFT różnych sygnałów

(a) impulsu prostokątnego

DEMO: [dft_square.m](#)

(b) fali prostokątnej

DEMO: [dft_square2.m](#)

(c) sinusoidy

DEMO: [dft_sinus.m](#)

Analiza systemów o wymuszeniach okresowych

- Załóżmy, że liniowy system stacjonarny jest pobudzany sygnałem okresowym $x(t)$
- Rozpatrzmy skończoną aproksymację \hat{x}_n sygnału $x(t)$ postaci

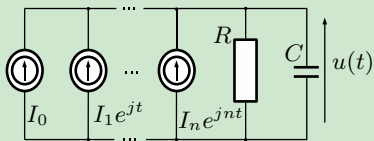
$$\hat{x}_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (1)$$

- Ponieważ system jest liniowy, to można zastosować zasadę superpozycji: przeprowadzić analizę systemu oddzielnie dla każdej harmonicznej, a następnie zsumować wyniki
- Jeżeli odpowiedź na k -tą harmoniczną określimy jako $B_k \cos(k\omega_0 t + \gamma_k)$ to odpowiedzią systemu na wymuszenie \hat{x}_n jest

$$\hat{y}_n = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k \cos(k\omega_0 t + \gamma_k) \quad (2)$$

Przykład 11

Rozważmy elektryczny układ RC ze źródłem prądowym $i(t) = 0.1 \cdot \mathbf{1}(\cos(2\pi t))$. Znaleźć napięcie $u(t)$.



$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k e^{jkt}$$

$$I_0 = \pi, \quad I_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

Szukamy napięcia postaci

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jkt}$$

Impedancja obwodu

$$z(k) = \frac{R}{1 + jkRC}$$

Składowa stała – analiza stałoprądowa $U_0 = I_0 R$

Odpowiedź na k -tą harmoniczną sygnału wejściowego

$$U_k = I_k z(k) = \frac{I_k R}{1 + jkRC}$$

Transmitancja częstotliwościowa

Własności dynamiczne układu można opisać w postaci równania różniczkowego

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

W celu rozwiązania (3) dokonujemy transformacji Fouriera obu stron tego równania

$$\begin{aligned} (a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0) Y(j\omega) \\ = (b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0) X(j\omega) \end{aligned}$$

Czyli

$$Y(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} X(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

Wielkość $H(j\omega)$ nazywamy transmitancją częstotliwościową systemu czasu ciągłego

Odpowiedź układu w dziedzinie częstotliwości

$$Y(j\omega) = H(\omega)X(j\omega)$$

Odpowiedź systemu w dziedzinie czasu

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y(j\omega))$$

Znając parametry a_i i b_j można wyznaczyć transmitancję częstotliwościową i na jej podstawie odpowiedź systemu na dowolne wymuszenie

Przykład 12

Wyznaczyć odpowiedź systemu z przykładu 11, po pobudzeniu sygnałami:

(i) $x_1(t) = \cos(\omega_1 t)$, $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$,

(ii) $x_2(t) = 2 \sin(\omega_2 t)$, $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$.

Założyć $C = 1$ i $R = 1$.

Opis za pomocą równania różniczkowego

$$x(t) = C \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{R} y(t)$$

Transmitancja częstotliwościowa

$$H(j\omega) = \frac{1}{Cj\omega + \frac{1}{R}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Przykład 12 – c.d.

dla sygnału pierwszego $\omega_1 = 1 \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+j} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$
czyli

$$Y_1(j\omega) = H(j\omega)X_1(j\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}X_1(j\omega)$$

z przesunięcia w dziedzinie czasu mamy

$$x(t \pm t_0) = e^{\pm j\omega_0 t} X(j\omega)$$

więc

$$y_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Przykład 12 – c.d.

dla sygnału drugiego $\omega_2 = 2 \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+j2} = \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-j1.1071}$

czyli

$$Y_2(j\omega) = H(j\omega)X_2(j\omega) = \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-j1.1071}X_2(j\omega)$$

więc

$$y_2(t) = \frac{\sqrt{5}}{5}x_2(t - 1.1071) = \frac{\sqrt{5}}{5}\sin(t - 1.1071)$$