Rozdział 8

Ciągi i szeregi funkcyjne

8.1 Zbieżność ciągu i szeregu funkcyjnego

Dla skrócenia zapisu przyjmijmy pewne oznaczenie.

Definicja. Niech $X, Y \neq \emptyset$. Przez Y^X oznaczamy zbiór wszystkich funkcji określonych na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y.

Definicja ciągu funkcyjnego. Niech $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{N}$ o wartościach w zbiorze funkcji $\mathbb{R}^X$ nazywamy *ciągiem funkcyjnym* i oznaczamy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ lub $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, piszemy również $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ lub $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$.

Definicja zbieżności ciągu funkcyjnego. Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$. Mówimy, że *ciąg funkcyjny* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest *zbieżny*, gdy istnieje funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Funkcję f nazywamy *granicą* ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i piszemy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Ciąg funkcyjny, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*.

Uwaga 8.1.1. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będą ciągami funkcyjnymi zbieżnymi odpowiednio do $f, g : X \to \mathbb{R}$. Wprost z własności granic ciągów liczbowych dostajemy, że: suma $(f_n + g_n)_{n=1}^{\infty}$, różnica $(f_n - g_n)_{n=1}^{\infty}$ i iloczyn $(f_n g_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągami zbieżnymi odpowiednio do $f + g$, $f - g$ i fg. Jeśli ponadto $g(x) \neq 0$, $g_n(x) \neq 0$ dla $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to ciąg $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $\frac{f}{g}$.*

Definicja szeregu funkcyjnego. Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będzie ciągiem funkcyjnym.

Ciąg funkcyjny $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, $n = 1, 2, \ldots$ nazywamy *ciągiem sum częściowych ciągu* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Szeregiem funkcyjnym nazywamy parę uporządkowaną $\left((f_n)_{n=1}^{\infty}, (s_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ i oznaczamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Wtedy ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *ciągiem sum częściowych szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definicja zbieżności szeregu funkcyjnego. *Szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ nazywamy *zbieżnym*, gdy zbieżny jest jego ciąg sum częściowych. Jeśli $s : X \to \mathbb{R}$ jest granicą ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, to mówimy, że szereg ten jest zbieżny do s, funkcję s zaś nazywamy *sumą tego szeregu* i piszemy $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Szereg funkcyjny, który nie jest zbieżny nazywamy *rozbieżnym.*

Uwaga 8.1.2. *Niech $f_n(x) = x^n$, $x \in (-1,1]$, n=1,2,... Ciąg ten jest zbieżny do funkcji $g : (-1,1] \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $g(x) = 0$ dla $x \in (-1,1)$ oraz $g(1) = 1$. Szereg funkcyjny zaś $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest rozbieżny, gdyż rozbieżny jest w punkcie $x = 1$. Szereg ten rozważany w zbiorze $(-1,1)$ jest zbieżny i jego sumą jest $\frac{x}{1-x}$.*

Uwaga 8.1.3. *Przypomnijmy, że dla $k \in \mathbb{Z}$ oznaczamy $\mathbb{Z}_k = \{m \in \mathbb{Z} : m \geqslant k\}$. Podobnie jak w przypadku ciągów i szeregów liczbowych, w wielu zagadnieniach wygodnie jest rozważać ciągi i szeregi funkcyjne w nieco ogólniejszym sensie, gdzie wskaźniki przebiegają zbiór $\mathbb{Z}_k$. Dokładniej, niech $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{Z}_k$ o wartościach w zbiorze funkcji $\mathbb{R}^X$ nazywamy ciągiem funkcyjnym i oznaczamy $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_k}$ lub $(f_n)_{n=k}^{\infty}$ lub $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = k, k+1, \ldots$ lub $f_k, f_{k+1}, \ldots$, piszemy również $(f_n)_{n=k}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$.*

Podobnie postępujemy dla szeregów funkcyjnych. Niech $(f_n)_{n=k}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będzie ciągiem funkcyjnym. Ciąg funkcyjny $s_n = f_k + \cdots + f_n$, $n = k, k+1, \ldots$ nazywamy ciągiem sum częściowych ciągu $(f_n)_{n=k}^{\infty}$.

Szeregiem funkcyjnym nazywamy parę uporządkowaną $((f_n)_{n=k}^{\infty}, (s_n)_{n=k}^{\infty})$ i oznaczamy $\sum_{n=k}^{\infty} f_n$. Wtedy ciąg $(s_n)_{n=k}^{\infty}$ nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=k}^{\infty} f_n$.

Podobnie jak wyżej deiniujemy pojęcia zbieżności ciągu i szeregu funkcyjnego. W dalszym ciągu ograniczymy się głównie do ciągów i szeregów których wskaźniki przebiegają zbiór liczb naturalnych (wyjątek stanowią szeregi potęgowe). Wprowadzone dalej pojęcia i udowodnione twierdzenia przenoszą się łatwo na ogólny przypadek.

8.2 Jednostajna zbieżność ciągu funkcyjnego

Definicja jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego. Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$jest *jednostajnie zbieżny*, gdy istnieje funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n > N$ oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Wtedy mówimy, że *ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f* i piszemy $f_n \rightrightarrows f$.

Uwaga 8.2.1. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$. Z definicji zbieżności mamy*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x\in X}\, \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{n>N}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oraz

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{n>N}\, \forall_{x\in X}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Różnica między definicją zbieżności ciągu funkcyjnego i zbieżności jednostajną polega na tym, że w pierwszej definicji dobieramy N do x oraz do ε, w drugiej zaś dobieramy N do ε, wspólne dla wszystkich $x \in X$

Bezpośrednio z definicji dostajemy następującą własność.

Własność 8.2.2. *Jeśli ciąg funkcyjny* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *jest jednostajnie zbieżny do funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$, *to ciąg ten jest zbieżny do* f.

Uwaga 8.2.3. *Definicje zbieżności i zbieżności jednostajnej nie są równoważne. Na przykład ciąg funkcyjny* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *określony wzorem* $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ *jest zbieżny do funkcji* $f(x) = 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}$. *Ciąg ten nie jest jednak zbieżny jednostajnie do funkcji* f.

Podobnie jak dla szeregów liczbowych dostajemy

Własność 8.2.4. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *oraz niech* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Jeśli* $f_n \rightrightarrows f$ *i* $g_n \rightrightarrows g$,*to* $(f_n + g_n) \rightrightarrows (f + g)$ *oraz* $(f_n - g_n) \rightrightarrows (f - g)$.

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, to istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{oraz} \qquad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wówczas dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

oraz

$$|f_n(x) - g_n(x) - f(x) + g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

To daje tezę. □

Własność 8.2.5. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *oraz* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Jeśli* $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ *oraz istnieje* $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, *że* $|f_n(x)|, |g_n(x)| \leqslant M$ *dla wszystkich* $x \in X$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$, *to* $(f_n g_n) \rightrightarrows (fg)$.

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, to istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{oraz} \qquad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ponieważ $|g_n(x)| \leqslant M$ dla $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$, więc przechodząc do granicy mamy $|g(x)| \leqslant M$ dla $x \in X$. W konsekwencji dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

To daje tezę. □

Uwaga 8.2.6. *W powyższej własności założenia, że funkcje* f_n, g_n *są ograniczone nie można opuścić. Mianowicie ciągi* $f_n(x) = x$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *są jednostajnie zbieżne lecz ciąg* $(f_n g_n)_{n=1}^{\infty}$ *nie jest jednostajnie zbieżny. Ponadto ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *nie jest ograniczony.*

Podobnie jak własność 8.2.5 dowodzimy

Własność 8.2.7. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ oraz $f_n \rightrightarrows f$, gdzie $f : X \to \mathbb{R}$. Jeśli $g : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną, to $(f_n g) \rightrightarrows (fg)$.*

Własność 8.2.8. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będzie ciągiem funkcyjnym oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$. Oznaczmy*

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) $f_n \rightrightarrows f$.

(b) *istnieje $m \in \mathbb{N}$, że $M_n \in \mathbb{R}$ dla $n \geqslant m$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.*

Dowód. Ad. (a)$\Rightarrow$(b) Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $m \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geqslant m$ oraz $x \in X$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < 1$. Zatem $0 \leqslant M_n \leqslant 1$, a więc $M_n \in \mathbb{R}$ dla $n \geqslant m$.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas, wobec (a), istnieje $N \geqslant m$ takie, że dla $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd i z określenia M_n dla $n > N$ mamy $|M_n - 0| = M_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. To daje, że $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Ad. (b)$\Rightarrow$(a) Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas, wobec (b), istnieje $N \geqslant m$, że dla $n > N$ zachodzi $M_n < \varepsilon$. Ponieważ z określenia M_n dostajemy, że dla $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| \leqslant M_n$, więc dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. To daje jednostajną zbieżność ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji f. □

Twierdzenie 8.2.9. (warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego). *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcyjnym, gdzie $f_n : X \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{n,l>N}\, \forall_{x\in X}\ |f_n(x) - f_l(x)| < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny, powiedzmy do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem dla każdych $n, l > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_n(x) - f_l(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To daje, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.1).

Załóżmy teraz, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.1). Wówczas dla każdego $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem na podstawie twierdzenia Cauchy'ego 4.7.3 dla każdego $x \in X$ istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Oznaczając tę granicę przez $f(x)$ dla $x \in X$ mamy określoną funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ do której jest zbieżny ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Pokażemy, że $f_n \rightrightarrows f$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. W myśl (8.1) istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla $n, l > N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem przechodząc do granicy przy $l \to \infty$ dostajemy, że dla $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. To daje $f_n \rightrightarrows f$. □

ZADANIA

Zadanie 8.2.1. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *będą ciągami funkcyjnymi, gdzie* $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Niech* $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, *gdzie* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Wówczas jeśli istnieją* $M, K \in \mathbb{R}$, $M, K > 0$ *że* $|g_n(x)| \geqslant M$, $|f(x)| \leqslant K$ *dla* $x \in X$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\frac{f_n}{g_n} \rightrightarrows \frac{f}{g}$.

8.3 Jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego

Definicja jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, gdzie $f_n : X \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest *jednostajnie zbieżny*, gdy ciąg sum częściowych tego szeregu jest jednostajnie zbieżny.

Bezpośrednio z definicji dostajemy następującą własność.

Własność 8.3.1. *Każdy szereg funkcyjny zbieżny jednostajnie jest zbieżny.*

Z własności 8.2.4 i 8.2.7 dostajemy natychmiast

Własność 8.3.2. *Niech szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *będą zbieżne jednostajnie, przy czym* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$. *Wówczas*

(a) *szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n + g_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n - g_n)$ *są zbieżne jednostajnie.*

(b) *jeśli funkcja* $g : X \to \mathbb{R}$ *jest ograniczona, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g$ *jest zbieżny jednostajnie.*

Z warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego 8.2.9 dostajemy

Twierdzenie 8.3.3. (warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego). *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *będzie ciągiem funkcyjnym. Wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{m\geqslant l>N}\, \forall_{x\in X} \left|\sum_{n=l}^{m} f_n(x)\right| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Udowodnimy kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego

Twierdzenie 8.3.4. (kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego). *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *będzie ciągiem funkcyjnym. Jeśli istnieje ciąg liczbowy* $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *taki, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $|f_n(x)| \leqslant M_n$ *dla* $x \in X$ *oraz szereg liczbowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Pokażemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.2). Istotnie, weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ jest zbieżny, więc z twierdzenia

Cauchy'ego 5.1.6, istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdych $m \geqslant l > N$ mamy $|M_l + \cdots + M_m| < \varepsilon$. Zatem dla każdego $m \geqslant l > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_l(x) + \cdots + f_m(x)| \leqslant |f_l(x)| + \cdots + |f_m(x)| \leqslant M_l + \cdots + M_m < \varepsilon.$$

To daje, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.2). Stąd i z twierdzenia 8.3.3 dostajemy tezę. □

Uwaga 8.3.5. *Nie zachodzi twierdzenie odwrotne do kryterium Weierstrassa. Na przykład szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$ jest w przedziale $[0,1]$ zbieżny jednostajnie (co czytelnik sprawdzi bez trudu) lecz dla $x \in (0,1]$, szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie.*

Udowodnimy kryterium Abela jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego.

Twierdzenie 8.3.6. (kryterium Abela jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego). *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będą ciągami funkcyjnymi. Jeśli*

(i) *istnieje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x)| \leqslant M$,*

(ii) *dla każdego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jest malejący,*

(iii) *szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ jest jednostajnie zbieżny,*

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ, wobec (iii), szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ jest zbieżny jednostajnie, więc z warunku Cauchy'ego 8.3.3 istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $m \geqslant l \geqslant N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$\left|\sum_{n=l}^{m} g_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Ustalmy $l \geqslant N$. Zatem, oznaczając

$$A_n(x) = \sum_{j=l}^{n} g_j(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in X, \qquad n = l, l+1, \ldots,$$

mamy

$$|A_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad \text{dla} \qquad n = l, l+1, \ldots \tag{8.3}$$

Stosując przekształcenie Abela (patrz dowód kryterium Dirichleta 5.4.1) i uwzględniając (8.3), (i) oraz (ii) dla $m > l$ oraz $x \in X$ dostajemy

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=l}^{m} f_n(x) g_n(x)\right| &= \left|\sum_{n=l}^{m-1} A_n(x)(f_n(x) - f_{n+1}(x)) + A_m(x) f_m(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=l}^{m-1} |A_n(x)||f_n(x) - f_{n+1}(x)| + |A_m(x)||f_m(x)| \\
&\leqslant \sum_{n=l}^{m-1} \tfrac{\varepsilon}{4M}(f_n(x) - f_{n+1}(x)) + \tfrac{\varepsilon}{4M}|f_m(x)| \\
&= \tfrac{\varepsilon}{4M} f_l(x) - \tfrac{\varepsilon}{4M} f_m(x) + \tfrac{\varepsilon}{4M}|f_m(x)| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{4M} M + \tfrac{\varepsilon}{4M} M + \tfrac{\varepsilon}{4M} M < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dla $m = l$ zaś mamy

$$\left|\sum_{n=l}^{m} f_n(x)g_n(x)\right| = |f_l||g_l| \leqslant M\frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon.$$

Reasumując szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n g_n$ spełnia warunek Cauchyego zbieżności jednostajnej szeregów 8.3.3, więc jest to szereg zbieżny jednostajnie. To kończy dowód. □

Powtarzając dowód kryterium Dirichleta zbieżności szeregu liczbowego 5.4.1 dostajemy

Twierdzenie 8.3.7. (kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego). *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będą ciągami funkcyjnymi. Jeśli*

(i) *istnieje $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ oraz $x \in X$ zachodzi $|\sum\limits_{n=1}^{m} f_n(x)| \leqslant M$,*

(ii) *dla każdego $x \in X$ ciąg $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jest malejący,*

(iii) *Ciąg $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji tożsamościowo równej zeru,*

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ jest zbieżny jednostajnie.

8.4 Zbieżność jednostajna a ciągłość

Twierdzenie 8.4.1. *Niech ciąg funkcyjny $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, będzie zbieżny jednostajnie do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$. Jeśli wszystkie funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe w punkcie $x_0 \in X$, to f jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.*

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geqslant N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. W szczególności dla $n = N$ mamy

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad x \in X. \tag{8.4}$$

Ponieważ f_N jest funkcją ciągłą, więc istnieje $\delta > 0$, że dla każdego $x \in X$ takiego, że $|x - x_0| < \delta$ mamy

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.5}$$

Reasumując z (8.4) i (8.5) dla każdego $x \in X$ takiego, że $|x - x_0| < \delta$ mamy

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

To daje ciągłość funkcji f w punkcie x_0. □

Z twierdzenia 8.4.1 dostajemy natychmiast

Twierdzenie 8.4.2. *Jeśli ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, to f jest funkcją ciągłą.*

Analogicznie jak twierdzenia 8.4.1 dowodzimy

Twierdzenie 8.4.3. *Jeśli ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, *gdzie* $X \subset \mathbb{R}$, *funkcji jednostajnie ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$, *to* f *jest funkcją jednostajnie ciągłą.*

Z twierdzenia 8.4.1 dostajemy

N. zamianie granic

Twierdzenie 8.4.4. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, *gdzie* $X \subset \mathbb{R}$, *będzie ciągiem funkcyjnym zbieżnym jednostajnie do funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$. *Niech* x_0 *będzie punktem skupienia zbioru* X *oraz dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje skończona granica* $a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$. *Wówczas ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny, funkcja* f *ma granicę skończoną w punkcie* x_0 *oraz*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n \quad [1].$$

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ określmy funkcje $h_n : X \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ wzorami $h_n(x) = f_n(x)$ dla $x \in X \setminus \{x_0\}$ oraz $h_n(x_0) = a_n$. Wtedy z założenia, że $a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$ dostajemy, że funkcje h_n są ciągłe w punkcie x_0.

Pokażemy, że ciąg funkcyjny $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny. Istotnie, weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny, więc z warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego 8.2.9 dostajemy, że istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdych $m, l \geqslant N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$|f_m(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy przy $x \to x_0$ dostajemy $|h_m(x_0) - h_l(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dla $m, l \geqslant N$. Stąd mamy

$$|h_m(x) - h_l(x)| < \varepsilon \qquad \text{dla} \quad x \in X \cup \{x_0\}, \quad m, l \geqslant N.$$

Zatem z twierdzenia 8.2.9 dostajemy jednostajną zbieżność ciągu $(h_n)_{n=1}^{\infty}$. W szczególności ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Niech $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Określmy funkcję $h : X \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ wzorami $h(x) = f(x)$ dla $x \in X \setminus \{x_0\}$ oraz $h(x_0) = a$. Wówczas ciąg $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do h. Ponieważ ciąg ten jest jednostajnie zbieżny, więc jest on jednostajnie zbieżny do h. W konsekwencji z twierdzenia 8.4.1 wynika ciągłość funkcji h w punkcie x_0. Ponadto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0) = a.$$

To kończy dowód. □

Z twierdzenia 8.4.1 dostajemy

Wniosek 8.4.5. *Jeśli szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, *gdzie* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}$, *jest jednostajnie zbieżny i wszystkie funkcje* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *są ciągłe w punkcie* $x_0 \in X$, *to suma tego szeregu jest funkcją ciągłą w punkcie* x_0.

[1] inaczej $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$.

Dowód. Istotnie, sumy częściowe szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ są funkcjami ciągłymi w punkcie x_0, jako sumy skończonej ilości funkcji ciągłych w punkcie x_0. Zatem z twierdzenia 8.4.1 dostajemy tezę. $\square$

Z wniosku 8.4.5 dostajemy

Wniosek 8.4.6. *Jeśli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}$, jest jednostajnie zbieżny i wszystkie funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe, to suma tego szeregu jest funkcją ciągłą.*

Wobec faktu, że suma funkcji jednostajnie ciągłych jest jednostajnie ciągła, z twierdzenia 8.4.3 dostajemy

Wniosek 8.4.7. *Jeśli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}$, jest jednostajnie zbieżny i wszystkie funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$, są jednostajnie ciągłe, to suma tego szeregu jest funkcją jednostajnie ciągłą.*

8.5 Zbieżność jednostajna a różniczkowalność

Twierdzenie 8.5.1. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych na przedziale $[a, b]$. Jeśli ciąg $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny (na $[a, b]$) oraz dla pewnego $x_0 \in [a, b]$ ciąg $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to*

(a) *ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji różniczkowalnej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

(b) *$f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$, to znaczy $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$ dla $x \in [a, b]$.*

Dowód. Ponieważ ciąg $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie oraz ciąg $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, więc z warunku Cauchy'ego dostajemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{R}$, że

$$(8.6) \qquad |f'_m(x) - f'_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{dla każdych} \quad m, l > N_\varepsilon \quad \text{oraz} \quad x \in [a, b],$$

$$(8.7) \qquad |f_m(x_0) - f_l(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla każdych} \quad m, l > N_\varepsilon.$$

Pokażemy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie w $[a, b]$. Istotnie, wystarczy pokazać, że ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej. Weźmy więc dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $N = N_\varepsilon$. Zauważmy, że

$$(8.8) \qquad |f_m(x) - f_l(x)| < \varepsilon \quad \text{dla każdych} \quad m, l > N \quad \text{oraz} \quad x \in [a, b].$$

Istotnie, niech $m, l > N$. Dla $x = x_0$ (8.8) wynika z (8.7). Dla $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej 7.3.7 istnieje c leżący między x i x_0, że

$$(f_m(x) - f_l(x)) - (f_m(x_0) - f_l(x_0)) = (f'_m(c) - f'_l(c))(x - x_0).$$

więc z (8.6),

$$|f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_0) + f_l(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd i z (8.7) mamy

$$|f_m(x) - f_l(x)| \leqslant |f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_0) + f_l(x_0)| + |f_m(x_0) - f_l(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To daje (8.8). Z dowolności $\varepsilon > 0$ oraz z (8.8) wynika, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągów funkcyjnych, więc z twierdzenia 8.2.9 jest to ciąg zbieżny jednostajnie. Niech więc $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie granicą ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Pokażemy teraz, że

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \text{dla} \quad x \in [a, b]. \tag{8.9}$$

Istotnie, weźmy dowolny $x_1 \in [a, b]$ i rozważmy ilorazy różnicowe

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}, \qquad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \qquad x \in [a, b] \setminus \{x_1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z określenia funkcji f dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \qquad \text{dla} \quad x \in [a, b] \setminus \{x_1\}. \tag{8.10}$$

Ponadto z założenia o różniczkowalności funkcji f_n dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{x\to x_1} \varphi_n(x) = f_n'(x_1) \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.11}$$

Pokażemy, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie. Istotnie, weźmy dowolne $\eta > 0$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, że

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \eta.$$

Niech $N = N_\varepsilon$, gdzie N_ε jest dobrane na początku dowodu tak, że zachodzi (8.6). Niech $m, l > N$. Wówczas, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, dla dowolnego $x \in [a, b] \setminus \{x_1\}$ istnieje c leżący między x i x_1 taki, że

$$|f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_1) + f_l(x_1)| = |f_m'(c) - f_l'(c)||x - x_1| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_1| < \eta|x - x_1|,$$

więc

$$|\varphi_m(x) - \varphi_l(x)| = \left|\frac{f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_1) + f_l(x_1)}{x - x_1}\right| < \frac{\eta|x - x_1|}{|x - x_1|} = \eta.$$

To daje, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego i w konsekwencji jest to ciąg jednostajnie zbieżny. To, wraz z (8.10) daje, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do φ. Stąd, wobec (8.11), mamy spełnione wszystkie założenia twierdzenia 8.4.4. Zatem istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_1)$ oraz

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_1).$$

To daje, że funkcja f jest różniczkowalna oraz zachodzi (b). W konsekwencji, wobec jednostajnej zbieżności ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do f, mamy (a). To kończy dowód. $\square$

M.C.

(2⁰) *f_n są różniczkowalne w (a, b),*

(3⁰) *szereg pochodnych $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ jest jednostajnie zbieżny do sumy $g(x)$ w (a, b).*

Wtedy

(a) *szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w (a, b)*

(b) *funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest różniczkowalna w (a, b),*

(c) *$f'(x) = g(x)$ dla $x \in (a, b)$, czyli $\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.*

Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych.

W poniższym paragrafie sformułujemy twierdzenie, które odpowiada nam na pytanie, kiedy można dokonać przejścia do granicy pod znakiem całki tj. kiedy $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$, o ile funkcje f_n są ciągłe w $< a, b >$
i skończona granica $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ istnieje dla każdego $x \in < a, b >$.

Twierdzenie 18.6. (o całkowaniu ciągów funkcyjnych). *Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych w $< a, b >$ jest zbieżny jednostajnie w $< a, b >$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Dowód.

Niech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Na podstawie twierdzenia o ciągłości granicy, funkcja f jest też ciągła w $< a, b >$.
Obierzmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ (f_n) jest ciągiem zbieżnym jednostajnie do funkcji f więc istnieje taki wskaźnik N, niezależny od x, że $| f_n(x) - f(x) |< \frac{\varepsilon}{b-a}$, dla $n > N$ i $x \in < a, b >$. Stąd na mocy własności całek oznaczonych mamy:

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b | f_n(x) - f(x) | dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \;, \quad \text{dla} \quad n > N \;.$$

MC.

Zatem
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Twierdzenie 18.7. (o całkowaniu szeregów funkcyjnych). *Jeżeli szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *funkcji* f_n *ciągłych w* $< a, b >$ *jest jednostajnie zbieżny w* $< a, b >$, *to*
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx \ .$$

Dowód.

Wykorzystując poprzednie twierdzenie do ciągu sum częściowych szeregu $s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ otrzymujemy
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx \ .$$

Zadania.

Zadanie 1.

Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego (f_n) o n-tym wyrazie:

(a) $f_n(x) = \dfrac{2}{1+nx^2}$,

(b) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

(c) $f(x) = \dfrac{2nx}{2+nx^2}$,

(d) $f_n(x) = 2n\sin\frac{x}{n}$,

Zadanie 2.

Wykazać jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego (f_n) o n-tym wyrazie: